四面体の体積の求め方

とっても大切だよ。

四面体の体積を求めるには様々な方法がありますが，今回は空間ベクトルを利用して求めてみよう．空間ベクトルの様々な知識を総動員するのでとても良い勉強になります．

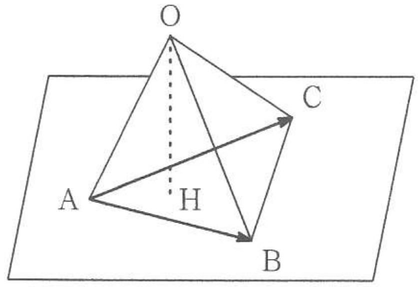
はーい

四面体の体積は，（底面積）×（高さ）×$\frac{1}{3}$ で求められるので，底面積と高さを計算することになります．言うまでもなく「高さ」とは，頂点から底面に下ろした垂線の長さのことです．

空間における垂線を扱う場合，次の事項が重要です．

これまでに何度も登場してます

そうかな？



垂線OHの長さなんてどうやって求めるのかな？

しら〜ん

▷Point◁

点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足が H

⟺ 「点 H が平面 ABC 上にある」かつ「$\mathrm{OH}\perp\mathrm{AB}$，$\mathrm{OH}\perp\mathrm{AC}$」

⟺ 「$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$と表せる」かつ「$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$」

このポイントはムチャクチャ大切です

注　上の「・・・」かつ「・・・」の部分．前半部分が"$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=$"で後半部分が$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$の関係式になっていることに注意しよう．よく間違えるところです．意味をしっかり考えよう．どうしても混同してしまう人は，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \iff \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (\alpha+\beta+\gamma=1)$$

なので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$で統一してもかまいませんが，煩雑になるのであまりおススメしません．

ポイント通りに理解します

はーい

例題 1

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=4,\quad \mathrm{OB}=3,\quad \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$$

である四面体 OABC の体積を求めよ．

どんな四面体になるのかな？

う〜ん

考え方　まずは底面を決めましょう．「四面体 OABC」なので反射的に △ABC を底面にしたくなりますが，条件をよく見ると，△OAC が正三角形であることに気づくはず．底面は面積が計算しやすいところにしたいから，△OAC を底面にするべきです．

ナルホド〜

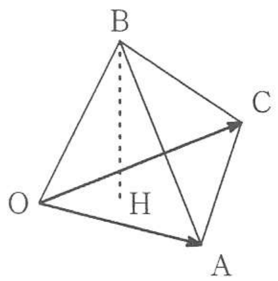
となれば，点 B から平面 OAC に下ろした垂線の足を点 H としたときの BH の長さが高さになります．

解

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

最初に内積の値を計算しておく．

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=4\times3\times\frac{1}{2}=6$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=3\times4\times\frac{1}{2}=6$$
$$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^\circ=4\times4\times\frac{1}{2}=8$$



△OACを底面に考えます

OK. 納得!!

$\triangle$OAC を底面に考える．

点 B から平面 OAC に下ろした垂線の足を点 H とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\vec{a} + t\vec{c}$$

OK

と表すことができ，BH ⊥ 平面 OAC より

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

OK

さっきのポイントそのまんま

である．

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = s\vec{a} - \vec{b} + t\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$

$(s\vec{a} - \vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{a} = 0$

$s|\vec{a}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{a} + t\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$

$16s - 6 + 8t = 0$ … ①

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$

$(s\vec{a} - \vec{b} + t\vec{c}) \cdot \vec{c} = 0$

$s\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} + t|\vec{c}|^2 = 0$

$8s - 6 + 16t = 0$ … ②

①，② より，$s = t = \dfrac{1}{4}$.

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \dfrac{1}{4}\vec{a} - \vec{b} + \dfrac{1}{4}\vec{c}$.

落ち着いて計算しよう。決してむつかしくないよ

がんばります

もう一息!!

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2 &= \left|\frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\right|^2 \\ &= \frac{1}{16}|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + \frac{1}{16}|\vec{c}|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \vec{c}) + \frac{1}{8}(\vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= 1 + 9 + 1 - 3 - 3 + 1 \\ &= 6\end{aligned}$$

よって，$|\mathrm{BH}| = \sqrt{6}$

やっと出た〜
これが四面体の"高さ"です

$\triangle$OAC は 1 辺の長さが 4 の正三角形なので，その面積は

$$\triangle\mathrm{OAC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60° = 4\sqrt{3}$$

である．

したがって，四面体 OABC の体積は

$$4\sqrt{3} \times \sqrt{6} \times \frac{1}{3} = 4\sqrt{2}$$

■

注　今回，$\triangle$OAC がたまたま正三角形だったので簡単に面積が求まりましたが，一般的には，ベクトルの面積公式

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{c})^2}$$

を利用して求めます．

これは有名な公式!!

知ってる〜

例題 2

今度は座標かぁ〜

4 点 A(3, 6, 0)，B(1, 4, 0)，C(0, 5, 4)，D(3, 4, 5) のとき四面体 ABCD の体積を求めよ．

考え方　今度は xyz 空間内で 4 点が座標で与えられている四面体の体積を求めてみよう．基本的な流れは，**例題 1** と全く同じですが，ベクトルの計算が全て成分計算になります．

まずは底面を決めますが，今回の場合，図形的な特徴はなさそうなのでどこを底面に考えても良さそうです．今回は $\triangle$ABC を底面としましょう．となれば，点 D から平面 ABC に下ろした垂線の足を点 H としたときの DH の長さが高さになります．これも成分計算になります．

例題 1 と同じく，底面の 1 点 (今回の場合は A) を始点にベクトルを設定します．言うまでもないですが，点 A を始点にベクトルを考えるということは，点 A が原点に来るように四面体を平行移動したことと同じです．

そりゃそうや

解　点 A を始点にベクトルを設定する．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$