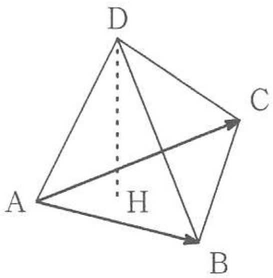


△ABC を底面とする．

点 D から平面 ABC に下ろした垂線の足を点 H とすると，

$$\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

と表すことができ，DH ⊥ 平面 ABC より

$$\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC}$$

さっきと同じや

である．

$$\overrightarrow{AH} = s\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2s-3t\\-2s-t\\4t\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DH} &= \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AD}\\ &= \begin{pmatrix}-2s-3t\\-2s-t\\4t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-2s-3t\\-2s-t+2\\4t-5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AB}$ より，$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$-2(-2s-3t)-2(-2s-t+2)+0(4t-5) = 0$

$\therefore\ 2s+2t = 1\ \cdots$ ①

$\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC}$ より，$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$-3(-2s-3t)-1(-2s-t+2)+4(4t-5) = 0$

$\therefore\ 4s+13t = 11\ \cdots$ ②

①② より，$s = -\frac{1}{2}$，$t = 1$．

したがって，

$$\overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

ぜーんぶ成分計算になるのね…

ちょっとだけ楽かなあ

$$\left|\overrightarrow{DH}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

また，△ABC の面積は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{8\cdot 26 - 8^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{144} = 6\end{aligned}$$

よって，四面体 ABCD の体積 V は

$$V = 6 \times 3 \times \frac{1}{3} = 6$$

■

注 ちなみに「点 H の座標を求めよ」と言われたら，

よく聞かれますよ!!

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}$$

となるので，H(1, 6, 4) となります．求められるようにしておこう．

はーい

参考 平面の方程式を知っている人は，平面 ABC の方程式を求めて，「点と平面の距離の公式」を利用して高さを計算してもかまいません．

▷Point◁

点 $(p,\ q,\ r)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ の距離 l は

$$l = \frac{|ap+bq+cr+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

である．

こんなんしらんで〜

一度やってみましょう．

別解 平面 ABC の方程式を求める．

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}$ に共に垂直なベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ である．よって，求める平面は点 A(3, 6, 0) を通り，法線ベクトルが $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ なので

何のことだかサッパリ〜

? ? ?

$$2(x-3)-2(y-6)+1(z-0) = 0$$

$$\therefore\ 2x-2y+z+6 = 0$$

よって，点 D(3, 4, 5) から平面 $2x-2y+z+6=0$ に下ろした垂線の長さは

$$\frac{|6-8+5+6|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{9}{3} = 3$$

である．以下，略．

なんか分からんけど高さが求まったみたい

ふーん

注　$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}$ に共に垂直なベクトルを求めるには「外積」という手法を利用します．「外積」については後ほど解説します．「外積」を使いたくなければ，求める平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とおいて，3点 A，B，C の座標を代入し，連立方程式

$$\begin{cases}3a+6b+d=0\\a+4b+d=0\\5b+4c+d=0\end{cases}$$

を解くことになります．文字が4つに式3つなので，a，b，c，d の値を決定することはできませんが，$b=-a$，$c=\dfrac{1}{2}a$，$d=3a$ というように1つの文字で表すことができるので，

$$ax-ay+\frac{1}{2}az+3a=0$$

$a\neq 0$ より，

$$2x-2y+z+6=0$$

と求まります．

こっちの方がしっくりくるね

うん

それでは，最後にちょっと意地悪な問題を紹介しよう．次の問題はどのように解きますか？

$\boxed{\text{例題}}$ **3**　四面体 OABC の6つの辺の長さを

$$\mathrm{OA}=\sqrt{10},\quad \mathrm{OB}=\sqrt{5},\quad \mathrm{OC}=\sqrt{6},\quad \mathrm{AB}=\sqrt{5},\quad \mathrm{AC}=2\sqrt{2},\quad \mathrm{BC}=\sqrt{5}$$

とするとき，四面体 OABC の体積を求めよ．

これまでと同じやろ？　ちがうの？

$\boxed{\text{考え方}}$　辺の長さをみれば，△OAB が直角二等辺三角形になっているので，ここを底面に考えます．となれば，点 C から平面 OAB に下ろした垂線の足を点 H としたときの CH の長さが高さになります．

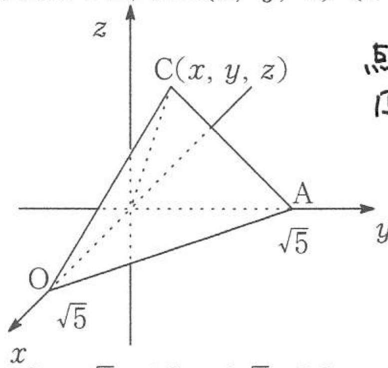
さて，$\boxed{\text{例題}}$ **1** と $\boxed{\text{例題}}$ **2** を振り返ると，四面体の体積をベクトルで求める場合，「内積」が key Point であることに気づくでしょう．垂線の長さを求めるには，どうしても内積を使わざるを得ないからです．$\boxed{\text{例題}}$ **1** は2つの辺の間の角が分かっていたので内積の値は簡単に計算できましたし，$\boxed{\text{例題}}$ **2** は成分表示だったので特に問題はありませんでした．さて，今回の場合，各辺の長さが与えられているだけです．内積の値を計算できなくもありませんが，底面が直角三角形であることに注目すれば，実はこの問題はベクトルを使わないほうが簡単に求められるのです．

マジっすか

エッ

解　△OAB が $\angle B=90^\circ$ の直角二等辺三角形なので，$B(0,\ 0,\ 0)$，$O(\sqrt{5},\ 0,\ 0)$，$A(0,\ \sqrt{5},\ 0)$ と座標を設定する．

図のように，点 $C(x,\ y,\ z)$ $(z>0)$ を定める．



点Cのz座標が四面体の高さになります。

フムフム

$\mathrm{OC}=\sqrt{6}$，$\mathrm{AC}=2\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=\sqrt{5}$ なので，

$$\begin{cases}(x-\sqrt{5})^2+y^2+z^2=6 & \cdots①\\x^2+(y-\sqrt{5})^2+z^2=8 & \cdots②\\x^2+y^2+z^2=5 & \cdots③\end{cases}$$

①－③ より，$-2\sqrt{5}x+5=1$．$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$．

②－③ より，$-2\sqrt{5}y+5=3$．$y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$．

よって，③ より $z^2=5-\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{5}=4$．$z=2$．

高さ！！

$\triangle\mathrm{OAB}=(\sqrt{5})^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$ なので，

$V=\dfrac{5}{2}\times 2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$．

座標ってスゴイね

■

注　もしベクトルを使って解くなら，始点を B に取るべきです（$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}=0$ だから）．次に，

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BO}\right|^2=\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO}+\left|\overrightarrow{BO}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right|^2=\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\left|\overrightarrow{BA}\right|^2$$

より内積 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ もわかります．あとは，$\boxed{\text{例題}}$ **1** と全く同じなので，各自で解いてみて下さい．

はーい

解きませーん。座標の方が良いでーす。