躍る大捜査線

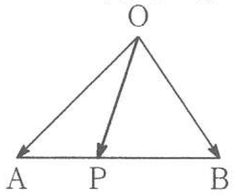
点Pの居場所をつきとめろ！

宝さがしみたいや～
点Pは　どこにあるん？

点Pについてのベクトルの関係式が与えられたときに，点Pが平面上あるいは空間内のどこに存在するのかを考えることはとても重要な問題です．基本となるのはこれまでに何度も登場した次の2つの▷Point◁です．これらを手がかりに点Pの居場所をつきとめよう．

▷Point◁

辺ABを $m:n$ に内分する点Pのベクトル表示



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$$

これは もう
常識でしょう

▷Point◁

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき，

$s+t=1 \iff$ 点Pは直線AB上にある．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のとき，

$s+t+u=1 \iff$ 点Pは平面ABC上にある．

これもよく登場するよね

例題 1　△ABCと点Pに対して，$5\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4\overrightarrow{\mathrm{BP}}+3\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ のとき，点Pの位置を調べ，さらに三角形△PBC，△PCA，△PABの面積比△PBC : △PCA : △PABを求めよ．

考え方　まずは，始点を△ABCの頂点の1つで統一します（今回はAでやってみます）．点Pの位置が決まれば面積比は簡単です．

これがポイント!!

解　$5\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4\overrightarrow{\mathrm{BP}}+3\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ より，

$5\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}$

$12\overrightarrow{\mathrm{AP}}=4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{12}$$

このままでは
何もわかりません

$$=\frac{7}{12}\cdot\boxed{\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}}$$

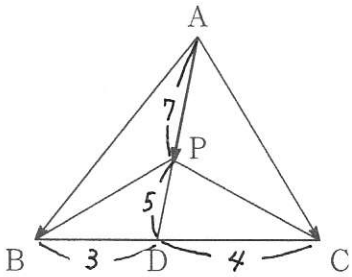
ポイント!!
このようにムリヤリに
"7"を持ち出して
変形します。
[ ]内の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の
係数の和が 1 に
なっています

$$=\frac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\left(\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\text{とおく}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\frac{7}{12}$ 倍に
縮めたものが
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ です

よって，点Pは辺BCを3 : 4に内分する点をDとするとき，線分ADを7 : 5に内分する点である．

■



点P発見♡
ヤッホーィ

△ABC $=S$ とおくと，

$\triangle\mathrm{PBC}=\frac{5}{12}S$

$\triangle\mathrm{PCA}=S\times\frac{4}{7}\times\frac{7}{12}=\frac{4}{12}S$

$\triangle\mathrm{PAB}=S\times\frac{3}{7}\times\frac{7}{12}=\frac{3}{12}S$

$\therefore\ \triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}$

$=\frac{5}{12}S:\frac{4}{12}S:\frac{3}{12}S=5:4:3$

このへんは
わかりますよね？
中学校レベル？

ドキッ

■

注　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3+4}$ と解釈します．このことから，辺BCを3 : 4に内分する点がDであることがわかります．

だから
ムリヤリに
変形したのね
フムフム

注　面積比が元の関係式の係数比に一致しています．これって偶然かな？

どーせ
必然って言いたいんやろ
フン

例題 2　四面体ABCDと点Pに対して，$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}+8\overrightarrow{DP}=\vec{0}$ のとき，点Pの位置を調べ，さらに四面体PBCD，PCDA，PDAB，PABCの体積比 PBCD : PCDA : PDAB : PABC を求めよ．

考え方　やっぱり，まずは，始点を四面体ABCDの頂点の1つで統一します（今回はAでやってみます）．今回は空間内での作業になりますが，基本的な手法は平面の場合と全く同じです．特定の面や断面に注目して考えることが最大のポイント．体積比は（底面積比）×（高さ比）で計算します．底面積比は **例題 1** と全く同じ方法で求めることができるでしょう．

解 $\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}+8\overrightarrow{DP}=\vec{0}$ より，

$\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+4(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})+8(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD})=\vec{0}$

$16\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}+8\overrightarrow{AD}$

このままでは何もわかりません

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}+8\overrightarrow{AD}}{16}$$

このようにムリヤリに"15"を持ち出して変形します。ここ[ ]内の$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$の係数の和が1になっています

$$=\frac{15}{16}\cdot\boxed{\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}+8\overrightarrow{AD}}{15}}$$

$$=\frac{15}{16}\cdot\frac{7\times\boxed{\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}}+8\overrightarrow{AD}}{15}$$

同じような変形を2回やるわけです

$$=\frac{15}{16}\cdot\frac{7\overrightarrow{AE}+8\overrightarrow{AD}}{15}$$

$3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$に注目してムリヤリに"7"を持ち出して変形。$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の係数の和が1

△ABCに注目してるわけです

$$=\frac{15}{16}\overrightarrow{AF}$$

フムフム

$\left(\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}=\overrightarrow{AE},\quad \dfrac{7\overrightarrow{AE}+8\overrightarrow{AD}}{15}=\overrightarrow{AF}\text{とおく}\right)$

よって，点Pは辺BCを4 : 3に内分する点をEとし，さらに線分EDを8 : 7に内分する点をFとするとき，線分AFを15 : 1に内分する点である．

■

注 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{4+3}$ と解釈します．このことから，辺BCを4 : 3に内分する点がEであることがわかります．

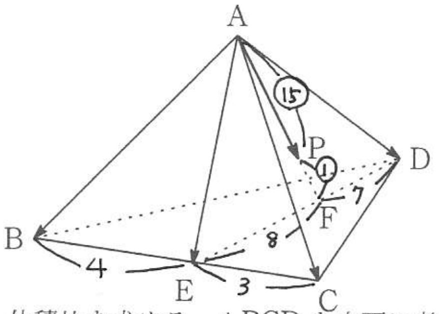
$\overrightarrow{AF}=\dfrac{7\overrightarrow{AE}+8\overrightarrow{AD}}{15}=\dfrac{7\overrightarrow{AE}+8\overrightarrow{AD}}{8+7}$ と解釈します．このことから，辺EDを8 : 7に内分する点がFであることがわかります．

☆ 平面ABCに注目して$\overrightarrow{AE}$を考え，さらに断面

☆ AEDに注目して$\overrightarrow{AF}$を考えたわけです．

⇒この最後の2行がとても大切な考え方です

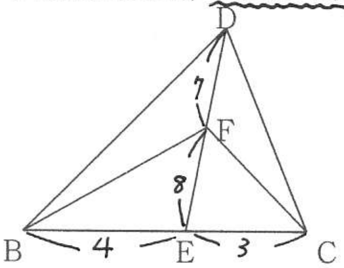
ナルホド〜



点P発見♡

やっと見つかった〜

体積比を求める，△BCDを底面に考える．



まず，底面の面積比 △FCD : △FDB : △FBC を求める．

△BCD $=S$ とおくと，

△FBC $=\dfrac{8}{15}S$

△FDB $=S\times\dfrac{4}{7}\times\dfrac{7}{15}=\dfrac{4}{15}S$

△FCD $=S\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{7}{15}=\dfrac{3}{15}S$

このへんはさっきの例題1と全く同じです

∴ △FCD : △FDB : △FBC

$=\dfrac{3}{15}S:\dfrac{4}{15}S:\dfrac{8}{15}S=3:4:8$

OK

次に，四面体ABCDの体積を V とおくと，

PBCD $=\dfrac{1}{16}V$

PCDA $=V\times\dfrac{3}{15}\times\dfrac{15}{16}=\dfrac{3}{16}V$

PDAB $=V\times\dfrac{4}{15}\times\dfrac{15}{16}=\dfrac{4}{16}V$

PABC $=V\times\dfrac{8}{15}\times\dfrac{15}{16}=\dfrac{8}{16}V$

∴ PBCD : PCDA : PDAB : PABC

$=\dfrac{1}{16}V:\dfrac{3}{16}V:\dfrac{4}{16}V:\dfrac{8}{16}V=1:3:4:8$

■

注　体積比が元の関係式の係数比に一致しています．これって偶然かな？

だから一必然なんでしょ!!