垂心と外心のベクトル表示

三角形の垂心と外心をベクトルで表してみよう．とは言っても，いきなりすぎて何から手をつけてよいか分かりませんが，まずスタートとなるのは次の有名事実です．

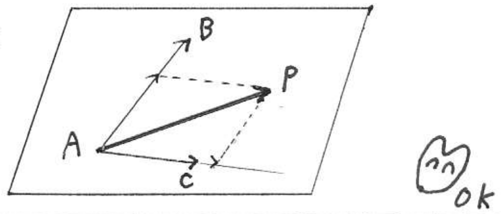
▷Point◁

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が 1 次独立のとき，平面 ABC 上の任意の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表すことができる．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$をテキトーに伸び縮みして足し合わせると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$が作り出せる．ということです。



つまり，△ABC が与えられたとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は必ず 1 次独立なので，垂心だろうと外心だろうと平面 ABC 上の点 P は全て必ず $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の形で表現されることが保証されているのです．

つまり，係数である s と t を決定することが目標となります．そのためには，垂心と外心の特徴をベクトルで表して，s と t の関係式を 2 個つくればよいのです．「垂直」が絡んでくるので内積を利用することがポイント．

1　垂心のベクトル表示

三角形の各頂点から，向かい合う辺（またはその延長）におろした垂線の交点を垂心と言います．

例題 1　AB = 6，AC = 4，∠A = 60° である三角形 ABC の垂心を H とする．
$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

考え方　先ほどの Point に従い，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおきます．あとは，垂心の条件から s と t の関係式を 2 個つくればよいのです．「垂直」が絡んでくるので内積を利用することがポイント．

解　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので，

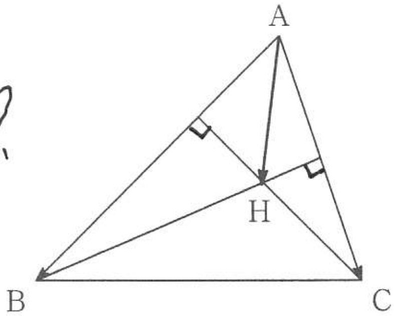
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

← これはお決まりの設定

とおける．

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = 36$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = 16$，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos 60° = 12$ である．



CH ⊥ AB より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$

$(\overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\left(s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$s\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$36s + 12t = 12$

$3s + t = 1$　…①

始点をすべてAにそろえます。

BH ⊥ AC より，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$

$(\overrightarrow{\mathrm{AH}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

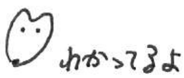
$\left(s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$12s + 16t = 12$

$3s + 4t = 3$　…②

始点をすべてAにそろえます。



①，②より，$s = \dfrac{1}{9}$，$t = \dfrac{2}{3}$．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

2　外心のベクトル表示

三角形の外接円の中心を外心と言い，各辺の垂直 2 等分線の交点として与えられます．

例題 2　AB ＝ 8，BC ＝ 7，CA ＝ 5 である三角形 ABC の外心を O とする．
$\overrightarrow{AO}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

考え方　先ほどと同様に $\overrightarrow{AO}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおいて，外心の条件から s と t の関係式を 2 個つくります．「垂直」が絡んでくるので内積を利用することがポイントですが，今回の場合，どうやって内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の値を計算するのでしょうか？

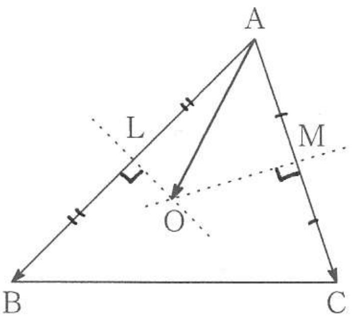
解　$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ より，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}{2}=\frac{8^2+5^2-7^2}{2}=20$$

3辺の長さから内積の値を求める方法をおぼえておこう。

知らんかったわ

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ は 1 次独立なので，



$$\overrightarrow{AO}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

これはお決まりの設定方法

OK

とおける．

辺 AB の中点を L，辺 AC の中点を M とすると，

LO ⊥ AB より，$\overrightarrow{LO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
$(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AL})\cdot\overrightarrow{AB}=0$
$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{AB}$
$\left(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$
$s\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+t\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$
$64s+20t=32$　…(※)
$16s+5t=8$　…①

始点をすべてAにそろえます

いつも通り…

MO ⊥ AC より，$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
$(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AC}=0$
$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$
$\left(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$
$s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$
$20s+25t=\frac{25}{2}$
$8s+10t=5$　…②

始点をすべてAにそろえます

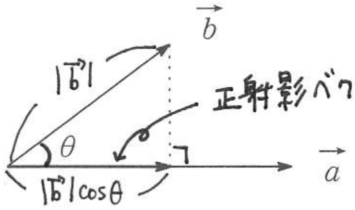
フツー

①，② より，$s=\frac{11}{24}$，$t=\frac{2}{15}$．したがって，$\overrightarrow{AO}=\frac{11}{24}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{15}\overrightarrow{AC}$

注　最初の内積の計算が思いつかない場合は，余弦定理から cos A の値を求めて内積の定義式 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A$ から求めても良いですが，結局やってることは同じであることに気づくはず．

参考　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は次のように解釈できます．
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\times\left|\vec{b}\right|\cos\theta$
$=$（$\vec{a}$ の大きさ）×（$\vec{b}$ を $\vec{a}$ に写した影の長さ）

注　影のベクトルを「正射影ベクトル」と言います．



そういう見方もあるのね

ふーん

つまり，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=$（$\overrightarrow{AB}$の長さ）×（$\overrightarrow{AO}$を$\overrightarrow{AB}$に写した影の長さ）と解釈できるのです．

（$\overrightarrow{AO}$を$\overrightarrow{AB}$に写した影の長さ）とはすなわち AL の長さのことなので，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=8\times4$．よって，$\overrightarrow{AB}\cdot\left(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right)=32$ より一気に式（※）が出てきます．これは早い！　正射影ベクトルの考え方を使いこなせるととても便利ですね．$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}$ も各自で確認しておこう．

はーい