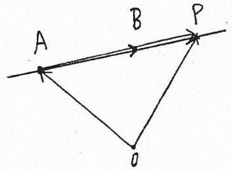
ベクトル方程式の話

そもそも ベクトル方程式って…何？

☆直線のベクトル方程式 〜 直線の方程式をベクトルを用いて表わそうというもの。

2点A, Bを通る直線のベクトル方程式

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ をみたす点Pの集まりが直線になるという考え方。



直線AB上の任意の点をPとすると、$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ が成立する。(tは実数)

このとき $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{AB}$

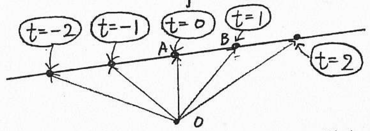
$\boxed{\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}}$ ← これが求める直線のベクトル方程式です。

通る点の位置ベクトル、直線の"方向ベクトル"といいます。

"t"とは一体なに？

"t"のことを媒介変数(パラメータ)といいます。tの値をいろいろと変化させると直線AB上のすべての点をもれなく表わすことができます。つまりtとは直線上の"目盛り"のようなものです。

$t=-2$ とすると $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{AB}$
$t=-1$ 〃 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}$
$t=0$ 〃 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}$
$t=1$ 〃 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\ (=\overrightarrow{OB})$
$t=2$ 〃 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}$

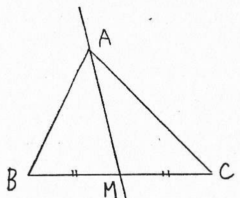


▷Point◁

直線のベクトル方程式の基本形
$\overrightarrow{OP}=$ (通る点の位置ベクトル) + t (方向ベクトル)

ここでは始点をOにとってますが どこを始点にとってもかまいません。どこを始点にするかは問題に書いてあります。(たいていOですが)

(例) △ABCの頂点A, B, Cの位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とする。Aと辺BCの中点を通る直線のベクトル方程式を直線上の点P($\vec{p}$)として求めよ。



BCの中点をMとする

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AM}$ ← (通る点の位置ベクトル) + t (方向ベクトル)
$=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})$
$=\vec{a}+t\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{a}\right)$
$=(1-t)\vec{a}+t\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ …①

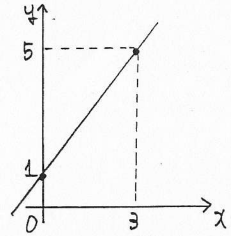
▷Point◁のとおりやな〜

(別) 通る点をMで考えて $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+t\overrightarrow{AM}$ としてもOK
この場合 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+t\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{a}\right)$
$=-t\vec{a}+(t+1)\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$
一瞬①とちがう気がしますが ①のtをt+1に置き換えただけで全く同じです。

ベクトルを成分表示すると、ベクトル方程式の意味がより具体的に理解できます。

ふ〜ん

(例) 2点A(0, 1), B(3, 5)を通る直線のベクトル方程式



直線上の点をP(x, y)とすると、求める直線のベクトル方程式は、
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ より $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ なので

$\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}$ ← これが成分表示されたベクトル方程式です。

いつもどおり

2点A, Bを通る直線の方程式は、
傾き $=\dfrac{5-1}{3-0}=\dfrac{4}{3}$ なので
$y-1=\dfrac{4}{3}(x-0)$ ∴ $y=\dfrac{4}{3}x+1$ ⟺(全く同じ) $y=\dfrac{4}{3}x+1$

両辺の成分を比較して $\begin{cases}x=0+3t & \cdots ①\\ y=1+4t & \cdots ②\end{cases}$
①より $t=\dfrac{x}{3}$、これを②に代入すると

おなじみの式が出てきた〜

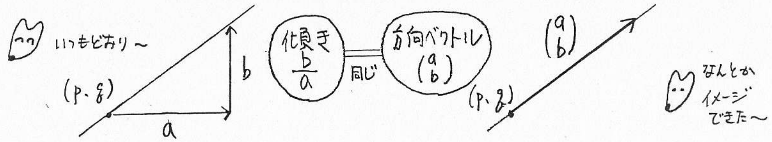
つまり、$\boxed{\text{成分表示されたベクトル方程式から媒介変数(パラメータ)を消去すれば、おなじみの直線の方程式になる。}}$ のです!!

→ ようするに、ベクトル方程式もこれまでの直線の方程式も全く同じだということ。

(注) 通る点をBで考えて $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{AB}$ としてもかまいません。この場合、
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ となりますが、$\begin{cases}x=3+3t\\ y=5+4t\end{cases}$ ← ①②のtをt+1に入れかえたもの
より tを消去すると、やはり $y=\dfrac{4}{3}x+1$ となります。やっぱり同じ。

tは任意の実数だからネ

一般に、点(p, q)を通り、傾き $\dfrac{b}{a}$ の直線 ＝(全く同じ)＝ 点(p, q)を通り、方向ベクトル $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ の直線



$y-q=\dfrac{b}{a}(x-p)$

変形 ⇕

$\dfrac{x-p}{a}=\dfrac{y-q}{b}$ → この比例式の値をtとおいて分母をはらうと…

∴ $\begin{cases}x-p=at & \cdots ①\\ y-q=bt & \cdots ②\end{cases}$

①より $t=\dfrac{x-p}{a}$ を ②に代入すれば…

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 成分比較して $\begin{cases}x=p+at\\ y=q+bt\end{cases}$

(注) "傾き $\dfrac{b}{a}$" と言うと $a\neq0$ であることが前提ですが、"方向ベクトル $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$" と言うと $a=0$ であっても大丈夫です。つまり ベクトル方程式の方が $a=0$ か $a\neq0$ を考える必要が全くないので、便利なのです。

ふ〜ん、それだけ〜？