☆空間内の直線のベクトル方程式

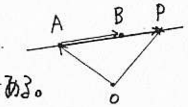
空間の2直線をつかんでで〜

空間内の直線のベクトル方程式は、平面上の直線のベクトル方程式の場合と、全く同様に定義されます（以前の犬プリを参照のこと!!）。つまり

▷Point◁

2点A, Bを通る直線のベクトル方程式は、直線上の点をPとすると、

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$，つまり $\overrightarrow{OP}$ =（通る点の位置ベクトル）+ t（方向ベクトル）である。



しかし、空間内の直線を正確に図示することはほとんど不可能です。よって図示してから直線をイメージするのではなく、ベクトル方程式をみて直線をイメージせねばなりません!!

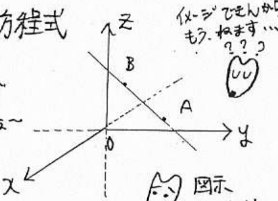
（例）2点A$(-2, 1, -1)$，B$(1, 3, 2)$を通る直線のベクトル方程式

$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$ より

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$ となる。

→ この式をみて、どんな直線かイメージできますか？

イメージできねぇ〜



イメージでもんからもう、ねます…？？？

図示できん!! わからん〜

平面上の直線の方程式

点(p, q)を通り、方向ベクトル$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$の直線のベクトル方程式は、

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

似てますねぇ

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}x=p+at\\ y=q+bt\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x-p=at\\ y-q=bt\end{cases}$$

$$\therefore \frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b} \cdots ①$$

これが直線の方程式です。

これはおなじみの式や

空間内の直線の方程式

点(p, q, r)を通り、方向ベクトル$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$の直線のベクトル方程式は、

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

z成分が追加しただけ

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}x=p+at\\ y=q+bt\\ z=r+ct\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x-p=at\\ y-q=bt\\ z-r=ct\end{cases}$$

$$\therefore \frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-r}{c} \cdots ②$$

これが平面の方程式です。

なんやこれは？

注　①は、$y-q=\frac{b}{a}(x-p)$ と変形でき、この式は点(p, q)を通り、傾き$\frac{b}{a}$の直線を表していますが、②は $y=\sim$ とか $z=\sim$ というような1つだけの式には変形できません。なぜなら②は"＝"（イコール）が2つあることからもわかるように、2つの式の連立方程式だからです。つまり

$$② \Longleftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-p}{a}=\dfrac{y-q}{b} \cdots ③\\[2mm] \dfrac{y-q}{b}=\dfrac{z-r}{c} \cdots ④\end{cases}$$

（①と③は全く同じ式ですが意味が違います。①は平面上の話なので直線を、③は空間内の話なので平面を表していることに注意しよう。）

③と④は空間内の平面を表しています。つまり③かつ④とは、2つの平面の交わりを意味しており、これが即ち、空間内の直線の正体です。2つの平面の交わりとして直線を表現しているのです。

▷Point◁（直線の方程式のまとめ）

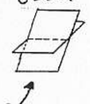
表にまとめるとわかりやすいワン!!

	平面上の直線	空間内の直線
ベクトル方程式	点(p, q)を通り、方向ベクトル$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$	点(p, q, r)を通り、方向ベクトル$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$
一般の方程式（ベクトル方程式からtを消去したもの）	$\dfrac{x-p}{a}=\dfrac{y-q}{b}$ $\Longleftrightarrow y-q=\dfrac{b}{a}(x-p)$	$\dfrac{x-p}{a}=\dfrac{y-q}{b}=\dfrac{z-r}{c}$ $\Longleftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-p}{a}=\dfrac{y-q}{b}\\ \dfrac{y-q}{b}=\dfrac{z-r}{c}\end{cases}$

いわゆるフツーの直線の方程式

2つの平面の連立方程式と考える。

2つの平面が交わって直線ができる!!



ナルホド カルホド

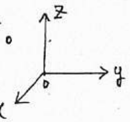
この▷Point◁をしっかり整理して頭に入れておこう!!　はーい……

(1) 2点A$(1, 2)$，B$(-1, 6)$を通る直線とx軸との交点を求めよ。

(2) 2点A$(1, 1, 3)$，B$(2, 3, 1)$を通る直線とxy平面との交点を求めよ。

基本問題や

＜考え方＞ 平面上ではx軸は"$y=0$"，空間内ではxy平面は"$z=0$"です。



（解）**ベクトル方程式を利用する方法** → (2)は、この方法がbestでしょう♡

(1) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ より、ベクトル方程式は、

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2t\\2+4t\end{pmatrix}$

x軸との交点は $y=0$ とすればよいので

$2+4t=0$　$\therefore t=-\frac{1}{2}$

このとき x座標は $1-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

$\therefore (2, 0)$ //

(2) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ より ベクトル方程式は、

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\\1+2t\\3-2t\end{pmatrix}$

xy平面との交点は $z=0$ とすればよいので

$3-2t=0$　$\therefore t=\frac{3}{2}$

このとき、$x=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$，$y=1+2\cdot\frac{3}{2}=4$

$\therefore \left(\frac{5}{2}, 4, 0\right)$ //

それぞれの違いを比べて下さい

ベクトル方程式を利用しない方法 → (1)はこの方法がbestでしょう♡

(1) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ より 求める直線の方程式は

$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{4}$

$y=0$を代入して計算すると $x=2$

$\therefore (2, 0)$ //

(2) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ より 求める直線の方程式は

$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$

$z=0$を代入すると $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{3}{2}$　$\therefore x=\frac{5}{2}$，$y=4$

$\therefore \left(\frac{5}{2}, 4, 0\right)$ //

マスターしたぞ!!

2直線 $l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $m:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ について
(s、tは媒介変数)

(1) lとmの交点の座標を求めよ。

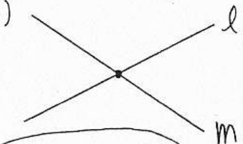
(2) 点P(4, 1)からlに垂線PQをおろす。このとき点Qの座標を求めよ。

→まずは、l、mの式をみて、どんな直線なのかイメージできなければなりません。

それと、例えば $l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を成分比較した $\begin{cases}x=s\\y=3+2s\end{cases}$ という関係式は、"l上の点が$(s,\ 3+2s)$という形における"ということを意味しています。

ナルホド
ナルホド

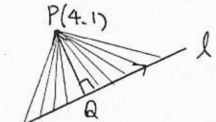
(解) (1)



l上の点を$(s,\ 3+2s)$
m上の点を$(6-2t,\ 1+3t)$ とおくと
lとmの交点は、これらが一致するときだから
$\begin{cases}s=6-2t\\3+2s=1+3t\end{cases}$ $\therefore s=2,\ t=2$
よって求める交点は$(2,\ 7)$ //

lの方向ベクトル$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
mの 〃 $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\nparallel\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ だからlとmは交わりますね。

(2)



$Q(s,\ 3+2s)$ とおくと $PQ\perp l$ より
$\overrightarrow{PQ}\cdot$(lの方向ベクトル)$=0$.
$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}s\\3+2s\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s-4\\2+2s\end{pmatrix}$
lの方向ベクトル$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$より
$1\times(s-4)+2\times(2+2s)=0$ $\therefore s=0$
よって $Q(0,\ 3)$ //

l上の点で$PQ\perp l$となるような点Qを求めればよいのですね

注 lとmをベクトル方程式ではなく、普通の方程式の形に直せば、この問題は中学校レベルの問題になります。

$l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\3+2s\end{pmatrix}$ より $\begin{cases}x=s\\y=3+2s\end{cases}$ sを消去して $y=2x+3$

$m:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-2t\\1+3t\end{pmatrix}$ より $\begin{cases}x=6-2t\\y=1+3t\end{cases}$ tを消去して $3x+2y=20$

つまり (1) $y=2x+3$ と $3x+2y=20$ の交点を求めよ
(2) $P(4,\ 1)$から $y=2x+3$ におろした垂線の足を求めよ、となります。

注 だったら「最初から普通の方程式で書けばエエやん、なんでいちいちベクトルでするの?」と思うかもしれませんが、実は後で学習する空間の直線を考える場合は、ベクトルでしかできないのです。空間の直線は、いわゆる普通の方程式で書き表すことができません。ですから、上の問題は、そのための準備ということで…。
"ベクトルらしさ"を感じてください。

はーい。

2直線 $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$, $m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ (s、t: 媒介変数)は、交わるかどうか調べよ。交わる場合は、その交点を求めよ。

<考え方> lの方向ベクトル$\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$と$m$の方向ベクトル$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$は平行ではないので、$l$と$m$は平行ではありません。しかし空間内の2直線は、平行でないからといって交わるとは限らないので、交わるかどうかの判定は、交点が存在するかどうかを調べることになります。
(平面上の2直線の場合は、「交わるから交点が存在する」と考えるのに対して、空間内の2直線の場合は「交点が存在するから交わる」と考えるのです。)

ナルホド
納得!!

(解) $l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2s\\-1-3s\\s\end{pmatrix}$ より、l上の点は$(1+2s,\ -1-3s,\ s)$とおける。

$m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2t\\2+t\\-1+2t\end{pmatrix}$ より、m上の点は$(-1+2t,\ 2+t,\ -1+2t)$とおける。

よってl上の点とm上の点が一致する、つまりx座標、y座標、z座標が等しいとすると

$\begin{cases}1+2s=-1+2t & \cdots①\\-1-3s=2+t & \cdots②\\s=-1+2t & \cdots③\end{cases}$ ← (文字が2つなのに式が3つあります。この場合は、2つの式だけに注目して解き、その解が残りの式もみたしていることを確認します。)

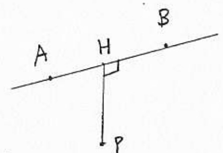
①かつ②より $s=-1,\ t=0$
これは③もみたしている。つまり①かつ②かつ③をみたすs、tは、ただ1組存在する。
よってlとmの交点が存在し、lとmは交わることがわかる。
求める交点は $s=-1$ をlの式に代入して、$(-1,\ 2,\ -1)$ //

これが言いたかったの

点$P(3,\ -1,\ 4)$から2点$A(0,\ -2,\ -3)$, $B(8,\ 4,\ 7)$を通る直線に垂線PHを下ろす。このとき点Hの座標を求めよ。

<考え方> 点Hは直線AB上の点なので、直線ABのベクトル方程式より、点Hの座標を設定します。あとは$PH\perp AB$なので……

(解) 直線ABのベクトル方程式は、$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}8\\6\\10\end{pmatrix}$ より



$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}8\\6\\10\end{pmatrix}$ ---(※)

点Hは直線AB上の点なので $H(8t,\ -2+6t,\ -3+10t)$ とおける。
$\therefore\ \overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}8t\\-2+6t\\-3+10t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+8t\\-1+6t\\-7+10t\end{pmatrix}$
$PH\perp AB$ より $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$。よって
$8(-3+8t)+6(-1+6t)+10(-7+10t)=0$ $\therefore t=\frac{1}{2}$
従って点Hの座標は $(4,\ 1,\ 2)$ //

ベクトル方程式ってなかなかやるじゃないか

(※) $\begin{pmatrix}8\\6\\10\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$ なので、$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$ としても OKです。