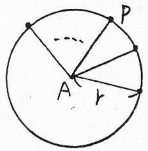
☆円のベクトル方程式 ～ 円の方程式をベクトルを用いて表わそうというもの

そもそも"円"とは、平面上において、ある点からの距離が等しい点の集合のことです（空間内なら、"球面"になります）。

点Aを中心とする半径rの円のベクトル方程式

"$AP=r$"をみたす点Pの集合が円になる、という考え方。



円上の点をPとすると "$AP=r$（一定）" が成立する。

⟶ このことをベクトルを用いて表現すると $|\overrightarrow{AP}|=r$

エッ、これだけ？

そうです。円の性質をベクトルで表現しただけ。

$\therefore\ |\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=r$

これが求める円のベクトル方程式です。

㊟ 座標平面で考えてみよう。$A(a, b)$, $P(x, y)$ とすると

$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ より $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$

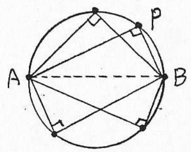
よって $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ $\quad\therefore (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

おなじみの、中心(a, b)、半径rの円の方程式が出てきました。ようするに、"同じこと"だったわけです。

なんか うれしい 安心する～

2点A, Bを直径の両端とする円のベクトル方程式

$\angle APB=90°$（$AP\perp BP$）をみたす点Pの集合が円になる、という考え方。



円上の点をPとすると $\angle APB=90°$、つまり $AP\perp BP$ が成立する。

⟶ このことをベクトルを用いて表現すると、$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

内積を用いて表現していますね。

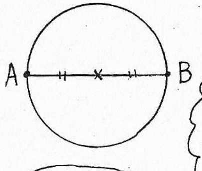
$\therefore\ (\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})=0$

これが求める円のベクトル方程式です。

▷Point◁

- 点Aを中心とする半径rの円のベクトル方程式 $\quad |\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=r$ ―― ①
- 2点A, Bを直径の両端とする円のベクトル方程式 $\quad (\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})=0$ ―― ②

㊟ このように2つ書くと、全く別物のような感じがしますが、②は①のタイプに変形できます。



② $\Longleftrightarrow$ $|\overrightarrow{OP}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ （展開する）

$|\overrightarrow{OP}|^2-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ ↓平方完成

$\left|\overrightarrow{OP}-\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\right|^2-\dfrac{|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2}{4}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\left|\overrightarrow{OP}-\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\right|^2=\dfrac{|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2}{4}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ $\quad\left(\dfrac{|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2-4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{4}=\dfrac{|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2}{4}\text{ より}\right)$

$\left|\overrightarrow{OP}-\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\right|^2=\left|\dfrac{\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}{2}\right|^2$

$\left|\overrightarrow{OP}-\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{BA}}{2}\right|$ …中心 $\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$、半径 $\left|\dfrac{\overrightarrow{BA}}{2}\right|$ の円

（①のタイプになりました）　（確かに正しい）

慎重に展開、平方完成しよう。

①と②は見た目は違うけど同じなんやなぁ～

原点Oと異なる点Aに対して動点Pがある。
次の条件式をみたすとき、点Pはどのような図形を描くか？

(1) $|\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OA}|$ $\qquad$ (2) $(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA})=0$

まずは、これらの条件式をみて、円を表すベクトル方程式であることに気づかねばなりません!!

（解）(1) $|\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OA}|$ より

$|\overrightarrow{OP}-(-3\overrightarrow{OA})|=|\overrightarrow{OA}|$ （一定）

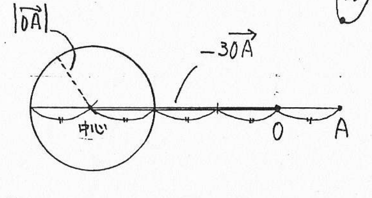
よって、この式は、点Pが $-3\overrightarrow{OA}$（の先っちょ）を中心とし、半径$|\overrightarrow{OA}|$の円上にあることを意味しているから、

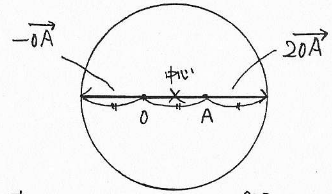
(2) $(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA})=0$ より

$(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-(-\overrightarrow{OA}))=0$

よって、この式は、点Pが $2\overrightarrow{OA}$（の先っちょ）と $-\overrightarrow{OA}$（の先っちょ）を直径の両端とする円上にあることを意味しているから、

なかなか思いつかないよ～





㊟ (2)を(1)のように変形して考えることもできます。

$(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA})=0$ より

$|\overrightarrow{OP}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}-2|\overrightarrow{OA}|^2=0$ $\qquad$ 平方完成です

$\left|\overrightarrow{OP}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2-2|\overrightarrow{OA}|^2=0$

$\left|\overrightarrow{OP}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right|^2=\frac{9}{4}|\overrightarrow{OA}|^2$ $\qquad\therefore\ \left|\overrightarrow{OP}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right|=\frac{3}{2}|\overrightarrow{OA}|$ （一定）

→(1)と同じ形になりました!!

中心 $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$（の先っちょ）半径 $\frac{3}{2}|\overrightarrow{OA}|$ の円

たしかに その通り!!

同じベクトルの内積には絶対値がつくことに注意。

3点 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(2, 2)$ に対して点Pが $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=3$ をみたしながら動くとき、点Pの軌跡を求めよ。

（解）$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=3$ より

$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}|=3$

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OP}|=3$

$|3\overrightarrow{OP}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})|=3$

$\left|\overrightarrow{OP}-\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\right|=1$

これは円です

この式は点Pが $\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$（の先っちょ）中心半径1の円上にあることを意味している。

$\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\dfrac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

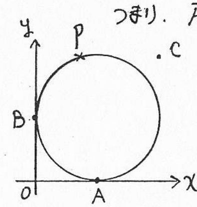
（別解）軌跡の問題なので $P(x, y)$ とおいて始めから成分計算してもOKです。

つまり、$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$
$=\begin{pmatrix}1-x\\-y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x\\1-y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2-x\\2-y\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}3-3x\\3-3y\end{pmatrix}$ だから

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=3$ より

$\sqrt{(3-3x)^2+(3-3y)^2}=3$

$(3-3x)^2+(3-3y)^2=9$



$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ ← 変形