最後に、ベクトル方程式について一言… 言わせて♡

そもそもベクトル方程式とは、図形の性質（特徴）をベクトルを用いて表現しただけのものです。扱う図形も、直線と円だけです。"方程式"という言葉に惑わされてはいけません。
にもかかわらず、「難しい」とか「わけわからん」と苦手意識を感じる人が多いのは、次にあげるベクトル方程式の基本理念が、しっかりと身についていないからでしょう。 そうなんかな〜？

▷Point◁

☆ベクトル方程式を考えるときの基本理念☆

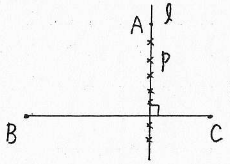
点の集まりか〜

① 図形を点の集まりだと考えること。
② 図形の性質（特徴）を意識しながら、それらの点に共通する性質（特徴）を考える。
③ その性質（特徴）を式又は言葉で表わす。
④ ③の式又は言葉をベクトルを用いて表現する。→ これが求める図形のベクトル方程式。

（→ 具体的には、図形上の任意の点をPとおいて、Pの位置ベクトル（つまり $\overrightarrow{OP}$）についての関係式をつくります。このことは問題文に書いてあるので、その指示に従えばよいでしょう。）

☆その他の図形のベクトル方程式 … 上の▷Point◁をもとにその他の図形を考えてみよう。

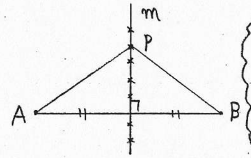
(1) 点Aから直線BCへ下ろした垂線 l



AP⊥BCをみたす点Pの集まりが l であるという考え方

l 上の点をPとすると AP⊥BC
ベクトルで表現すると $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$
$\therefore (\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$

(2) 線分ABの垂直2等分線 m



AP＝BPをみたす点Pの集まりが m であるという考え方

m 上の点をPとすると AP＝BP
ベクトルで表現すると $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$
$\therefore |\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|$ …①

（ABの中点をMとすると MP⊥AB なので(1)の考え方を用いると $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より
$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$ …②
としてもよいです。）

注 ①と②が全く同じ式であることを示そう。

② $\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$
$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-\left(\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}}{2}\right)\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$
$2\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-(|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2)=0$
$2\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2$

ナルホド!! 同じやな。

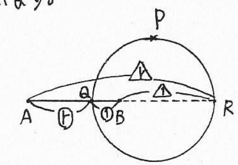
① $\Leftrightarrow |\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|^2$
$|\overrightarrow{OP}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$
$2\overrightarrow{OP}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2$ …③

同じ式です。

よって①と②は全く同じ式です。③を垂直2等分線のベクトル方程式だとする本もありますが、ぼくは①がベストだと思います。

(3) アポロニウスの円 … 2定点からの距離の比が一定である点の集合は円になります。この円のことを"アポロニウスの円"といいます。

$\dfrac{AP}{BP}=r$ $(r>0,\ r\neq1)$ とするとき、点Pの軌跡は
線分ABを $r:1$ に内分する点Qと $r:1$ に外分する点Rを直径の両端とする円になります。2点Q、Rの中点が円の中心で、QRの長さが円の直径です。

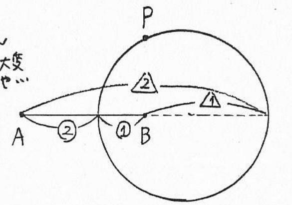


（なお、$\dfrac{AP}{BP}=1$ の場合が、ABの垂直2等分線であることに注意しよう）

(例) $|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{BP}|$ をみたす点Pはある円上にあることを示せ。 ふつうは成分計算で処理しますが、ベクトルでやってみます。

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=2|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|$
$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|^2=4|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|^2$
$|\overrightarrow{OP}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=4|\overrightarrow{OP}|^2-8\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+4|\overrightarrow{OB}|^2$
$3|\overrightarrow{OP}|^2-(8\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OP}+4|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2=0$
$3|\overrightarrow{OP}|^2-(8\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OP}+(2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot(2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$
$(3\overrightarrow{OP}-(2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}))\cdot(\overrightarrow{OP}-(2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}))=0$
$\left(\overrightarrow{OP}-\dfrac{2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}}{3}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OP}-(2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\right)=0$
$\left(\overrightarrow{OP}-\underbrace{\dfrac{1\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+1}}_{\text{ABを2:1に内分}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OP}-\underbrace{\dfrac{-1\cdot\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+(-1)}}_{\text{ABを2:1に外分}}\right)=0$

うーん かなり大変そうや…



よって点Pは、ABを2:1に内分する点と2:1に外分する点を直径の両端とする円上をうごく。//

（注「$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})=0 \Leftrightarrow$ ABを直径の両端とする円」でしたね。
注 アポロニウスの円は、結果を知っていれば、計算しなくてもどんな円なのかイメージできますが、暗記で答えを出すのではなく、上のような計算をキチッとできるようになってほしいです。）

さて、これまでいろいろとベクトル方程式を紹介してきましたが、実は大学入試において「ベクトル方程式を求めよ」という問題はほとんど出題されません!! エッ? マジで〜? ウッソ〜
"だったら別にやらなくてもエエやん!"という声が聞こえてきそうですが、実はベクトル方程式を求めるのではなく、逆に、与えられたベクトル方程式をみて、どんな図形を表しているのかを考える問題がほとんどなのです。最初から図形のイメージがあるのとないのとでは、その後の解答に大きく影響します。だから、ベクトル方程式の考え方、知識は絶対に必要なのです。 なーんや やっぱりやるんか…
ちなみに次のベクトル方程式をみて、どんな図形を表しているか、すぐにイメージできますか？

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OA}|$　　　$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}|$　　　$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA})=0$

O　A　　　　O　A　　　　O　A

できない人はもう一度大プリを読んで復習しておこう!!