平面と空間の基本事項

似てるような
似てないような…

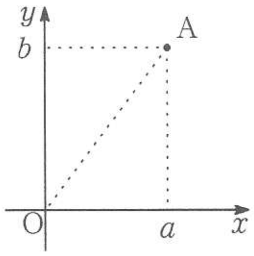
左側が平面，右側が空間での話です．対比してしっかりと頭に入れておこう．

この際やから
まとめておこう

1　座標

これは基本
ベクトルではありません

xy 平面



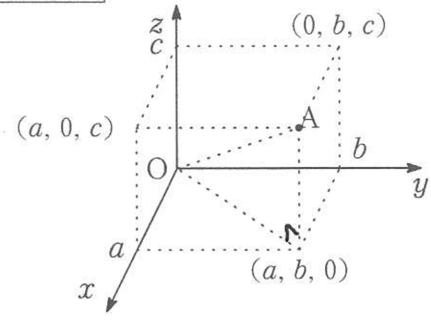
A$(a,\ b)$，B$(p,\ q)$ のとき，

OA の長さ $=\sqrt{a^2+b^2}$

AB の長さ $=\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2}$

言うまでもなく
三平方の定理が
根底に
あります

xyz 空間



楽勝～

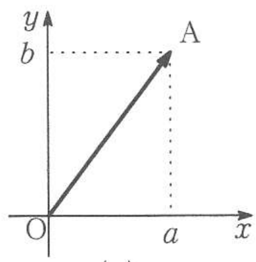
A$(a,\ b,\ c)$，B$(p,\ q,\ r)$ のとき，

OA の長さ $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

AB の長さ $=\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2+(r-c)^2}$

2　ベクトルの成分表示

ベクトルを平行移動して，始点を原点に持ってくる．その時の先っちょの点の座標を利用して，ベクトルを表現する考え方のこと．



ベクトルの成分計算は
そのまま足し引きする
だけなので
とてもカンタン

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ のとき，

$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\pm\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}a\pm p\\b\pm q\end{pmatrix}$

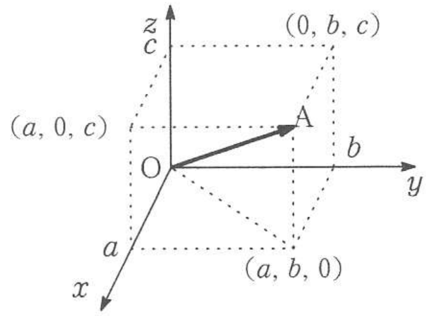
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}p-a\\q-b\end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2}$

$\boxed{\text{内積}}$　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=ap+bq$

座標は横書き．
ベクトルの成分表示は縦書き
→ 区別します。



楽勝～

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ のとき，

$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}ka\\kb\\kc\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\pm\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}a\pm p\\b\pm q\\c\pm r\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}p-a\\q-b\\r-c\end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2+(r-c)^2}$

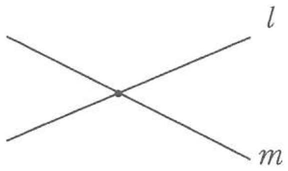
$\boxed{\text{内積}}$　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=ap+bq+cr$

3　図形的な性質，ていうか，事実

ほとんど直感的にわかりますね

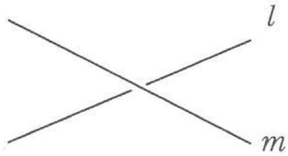
うん

事実　平面上の平行でない 2 直線は必ず交わる.



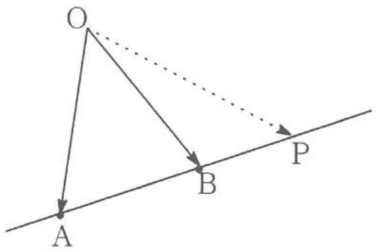
あたりまえ

事実　空間内の平行でない 2 直線は必ずしも交わるとは限らない（ねじれの位置）.



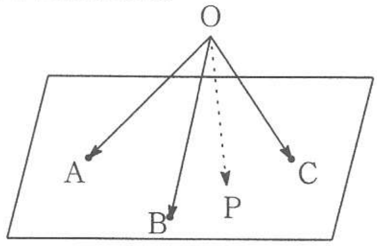
そりゃ そうや

事実　異なる 2 点を通る直線は 1 本だけある.



あたりまえ

事実　同一直線上にない異なる 3 点を通る平面は 1 面だけある.



そりゃ そうや

➾注　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立です.

▷Point◁

2 点 A，B を通る直線上に点 P がある.

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (s+t=1)$$

➾注　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は 1 次独立です.

▷Point◁

3 点 A，B，C を通る平面上に点 P がある.

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (s+t+u=1)$$

とても大切なことです。

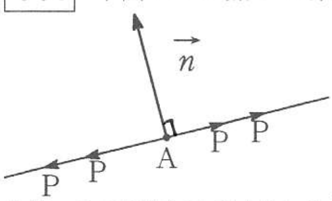
どっちも証明できるようにしておこう

とても大切なことです。

4　法線ベクトルについて

点 A を通りベクトル $\overrightarrow{n}$ に垂直な点の集まり，つまり $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{n}=0$ を満たす点 P の集まりを考えます.

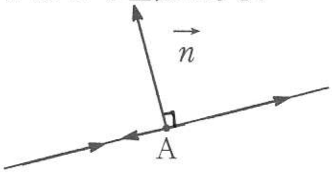
事実　平面上では点 P の集合は直線になる.



なるほど～

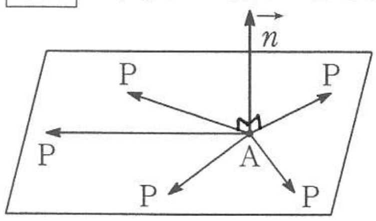
➾注　この直線を法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の直線といいます.

事実　法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の直線上の任意のベクトルは $\overrightarrow{n}$ と垂直である.



➾注　つまり，この直線上のどんなベクトルもすべて $\overrightarrow{n}$ と垂直だというわけです.

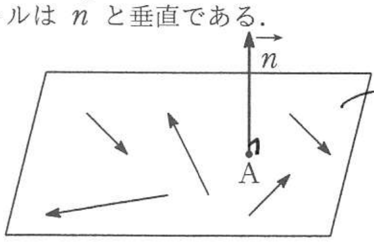
事実　空間内では点 P の集合は平面になる.



たしかに!!

➾注　この平面を法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の平面といいます.

事実　法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の平面上の任意のベクトルは $\overrightarrow{n}$ と垂直である.



この平面上のベクトルはぜんぶ $\overrightarrow{n}$ と垂直

フムフム

➾注　つまり，この平面上のどんなベクトルもすべて $\overrightarrow{n}$ と垂直だというわけです.

こうやって対比するとわかりやすいね

うん

とても重要な考え方です