図形問題をベクトルで解こう(平面ベクトル編)

ベクトルの本領発揮♡

こういうことがやりたかったの。

▷Point◁

① 何を示せばよいのか、目的をはっきりさせる。
② 自分の都合のよいようにベクトルを設定する。

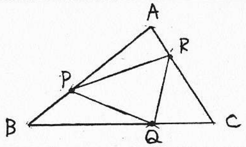
今回は、超重要な4問を紹介します。絶対にマスターしよう。

これら以外にも「わけのわからんベクトルがきたら、始点をそろえる」も常識としておきたいところ。

点が一致することの証明 … AとBが一致する $\iff \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$

“O”は何でもかまいません。ような同じ始点の位置ベクトルが一致すればよいのです。

△ABCの辺AB、BC、CAを2:1に内分する点をそれぞれP、Q、Rとするとき、△ABCの重心と△PQRの重心は一致することを示せ。



(解) △ABCの重心をG_1、△PQRの重心をG_2とすると

$$\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

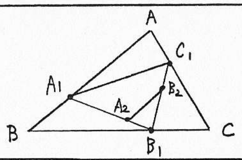
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG_2}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR})\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{2+1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\end{aligned}$$

$\therefore\ \overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{AG_2}$ よって $G_1=G_2$ となる。

コメント 始点をOにとってもかまいません。この場合、$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}$、$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{3}$、$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OA}}{3}$ を $\overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})$ に代入すれば $\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ に一致することがわかります。

平行であることの証明 … $AB /\!/ CD \iff \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ と表せる

△ABCの辺AB、BC、CAを2:1に内分する点をそれぞれA_1、B_1、C_1とする。△$A_1B_1C_1$の辺A_1B_1、B_1C_1を2:1に内分する点をA_2、B_2とするとき、$A_2B_2 /\!/ AB$を示せ



(解) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$、$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおく

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{AB_2}-\overrightarrow{AA_2}&=\frac{1\overrightarrow{AB_1}+2\overrightarrow{AC_1}}{2+1}-\frac{1\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{AB_1}}{2+1}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB_1}\\&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB_1}\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\frac{1\cdot\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}\\&=\frac{2}{9}\vec{c}-\frac{2}{9}\vec{b}-\frac{1}{9}\vec{b}-\frac{2}{9}\vec{c}=-\frac{1}{3}\vec{b}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

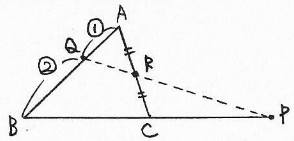
$\therefore\ A_2B_2 /\!/ AB$

始点をAにそろえた!!

コメント この問題はやはり始点はAにとるべきでしょう。別にOを始点にしてもかまいませんが…

3点が一直線上にあることの証明 … A、B、Cが一直線上にある $\iff \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ と表せる。

△ABCの辺ACを2:1に外分する点をP、辺BCを1:2に内分する点をQ、辺CAの中点をRとする。3点P、Q、Rは一直線上にあることを示せ。



(解) $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ とおくと

$\overrightarrow{BP}=2\vec{c}$、$\overrightarrow{BR}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$、$\overrightarrow{BQ}=\frac{2}{3}\vec{a}$ より

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{BR}-\overrightarrow{BP}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}-2\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\vec{a}-2\vec{c}$$

始点をBにそろえた!!

$\therefore\ \overrightarrow{PQ}=\frac{4}{3}\overrightarrow{PR}$ よって3点P、Q、Rは一直線上にある。//

コメント Bを始点にとるのが考えやすいと思います。Aを始点にとると外分点の公式が必要になります。

注 この結果から PR:RQ=3:1 であることがわかります。

注 なお、“メネラウスの定理の逆”を用いて証明することもできます。つまり $\frac{QB}{AQ}\frac{PC}{BP}\frac{RA}{CR}=1$ が成立するので3点P、Q、Rが一直線上にある、という証明です。あまりオススメしません。やっぱりベクトルで解いてほしい。

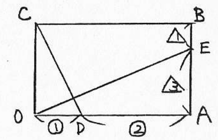
メネラウス〜

楽やな〜

垂直であることの証明 … $AB\perp CD \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

“垂直”ときたら「内積=0」このことは常識としておきたい。

OA=3、OC=2である長方形OABCがある。辺OAを1:2に内分する点をD、辺ABを3:1に内分する点をEとするとき、CD⊥OEであることを示せ。



(解) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと、$|\vec{a}|=3$、$|\vec{c}|=2$、$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ …(※)

これらの関係があるので、やはり$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおくべきでしょうね。

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}$$

ABを3:1に内分するので $\frac{1\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{3+1}=\frac{\vec{a}+3(\vec{a}+\vec{c})}{4}$ としてもOKです。

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OE}&=\left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{3}|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{3}{4}|\vec{c}|^2\\&=\frac{1}{3}\cdot3^2+\frac{1}{4}\cdot0-0-\frac{3}{4}\cdot2^2\quad(\because (※)より)\\&=0\end{aligned}$$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$
$\vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2$
これはOKでしょう。

$\therefore$ CD⊥OE //

計算で垂直であることがわかるなんて…ベクトルって便利〜

注 Oを原点とする座標を設定して解くこともできます。つまりA(3, 0)、C(0, 2)とおくとD(1, 0)、E$\left(3, \frac{3}{2}\right)$なので $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$、$\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix}3\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ より $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OE}=0$ となります。