図形問題をベクトルで解こう（空間ベクトル編）

ベクトルを使わないと空間図形の証明はムリやで

空間図形の問題と言えども、特定の面や断面に注目して考えれば、単なる平面図形の問題です。つまり「図形問題をベクトルで解こう（平面ベクトル編）」のプリントの内容が基本となります（むしろ、こちらの方が難しい!!）。そのプリントと合わせて学習して下さい。

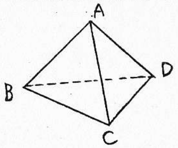
はーい

点が一致することの証明

…（AとBが一致する $\Longleftrightarrow \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$）

知ってるもーん

四面体ABCDにおいて、△ABC、△ACD、△ADB、△BCDの重心をそれぞれG、H、I、Jとするとき、線分DG、BH、CI、AJを3:1に内分する点は一致することを示せ。



(解) 線分DG、BH、CI、AJを3:1に内分する点をそれぞれP、Q、R、Sとすると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1\overrightarrow{OD}+3\overrightarrow{OG}}{3+1}=\frac{\overrightarrow{OD}+3\times\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})}{4}=\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{4}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OH}}{3+1}=\frac{\overrightarrow{OB}+3\times\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})}{4}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$$

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OI}}{3+1}=\frac{\overrightarrow{OC}+3\times\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB})}{4}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}}{4}$$

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OJ}}{3+1}=\frac{\overrightarrow{OA}+3\times\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})}{4}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$$

コメント：始点をOにそろえました。この方が出てくる結果が美しいです。（この点を正四面体の重心といいます）。

∴ $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OS}$　よって P=Q=R=S、すべて一致する。//

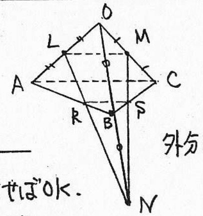
フムフム

平行であることの証明

…（AB//CD $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ と表せる）

知ってるって!!

四面体OABCの辺OA、OCの中点をそれぞれL、Mとし、辺OBを2:1に外分する点をNとする。直線ABとLN、直線BCとMNの交点をそれぞれR、Sとするとき、RS//LMであることを示せ。



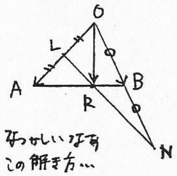
外分!!

〈考え方〉RS//LMを示すには $\overrightarrow{RS}=k\overrightarrow{LM}$ の形になることを示せばOK.
そのためには $\overrightarrow{RS}$ と $\overrightarrow{LM}$ をそれぞれ計算せねばならないが
始点がバラバラなので そろえる必要がある。どこに始点をおくか…？
常識的に判断すれば、始点はOである。つまり $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$、$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$
として $\overrightarrow{RS}$ と $\overrightarrow{LM}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ を用いて表わすことからスタートする。

なるほどなるほど

(解) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$、$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

平面OABに注目して、AR:RB=s:1−s、LR:RN=t:1−t とおく。



△OABに注目して $\overrightarrow{OR}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$

△OLNに注目して $\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OL}+t\overrightarrow{ON}=(1-t)\frac{1}{2}\vec{a}+t2\vec{b}$

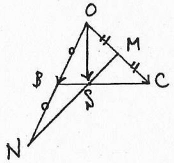
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立だから、

$$\begin{cases}1-s=\frac{1}{2}(1-t)\\ s=2t\end{cases}$$

∴ $s=\frac{2}{3}$、$t=\frac{1}{3}$　よって $\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

なつかしいなぁ この解き方…

次に平面OBCに注目して、BS:SC=s':1−s'、NS:SM=t':1−t' とおく



△OBCに注目して $\overrightarrow{OS}=(1-s')\overrightarrow{OB}+s'\overrightarrow{OC}=(1-s')\vec{b}+s'\vec{c}$

△ONMに注目して $\overrightarrow{OS}=(1-t')\overrightarrow{ON}+t'\overrightarrow{OM}=(1-t')2\vec{b}+t'\frac{1}{2}\vec{c}$

$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は1次独立だから

$$\begin{cases}1-s'=2(1-t')\\ s'=\frac{1}{2}t'\end{cases}$$

∴ $s'=\frac{1}{3}$、$t'=\frac{2}{3}$　よって $\overrightarrow{OS}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

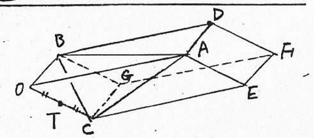
よって $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}=\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}=\frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{a})$

$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})$　∴ $\overrightarrow{RS}=\frac{2}{3}\overrightarrow{LM}$　よって RS//LM //

3点が一直線上にあることの証明

…（3点A、B、Cが一直線上にある $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ と表せる。）

線分OA、OB、OCを3辺とする平行六面体OADB−CEFGにおいて、△ABCの重心をH、線分OCの中点をTとする。3点T、H、Dは一直線上にあることを示せ。



(解) $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$、$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ より

$\overrightarrow{TH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{TD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$　∴ $\overrightarrow{TD}=3\overrightarrow{TH}$

よって3点T、H、Dは一直線上にある。//

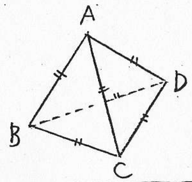
楽勝♡

垂直であることの証明

…（AB⊥CD $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$）

知ってるって言ってるやろ〜

正四面体ABCDにおいて AB⊥CD であることを証明せよ。



4つの面は正三角形です。

(解) 正四面体の一辺の長さを l とする

Aを始点に考えます

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos 60^\circ-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ$

$=\frac{1}{2}l^2-\frac{1}{2}l^2=0$　∴ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ //

ベクトルってやっぱスゴイわぁ

シンプル is ベスト!!