円の接線

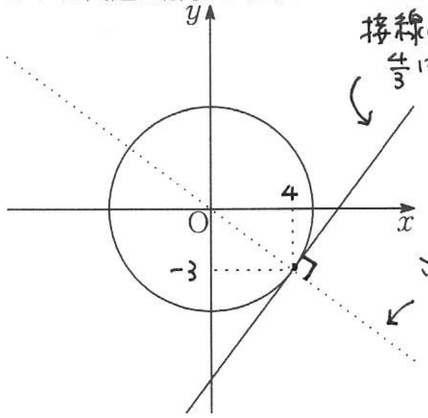
とてもとても大切ですよ　はーい がんばりまーす

円の接線に関する問題は入試頻出の重要テーマです．様々な考え方，解法があるのでしっかりと学ぼう．

1　円上の点における接線

例題 1.　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(4,\ -3)$ における接線の方程式を求めよ

考え方　接線と言っても単なる直線ですから，「通る点」と「傾き」で決定します．今回の場合，点 $(4,\ -3)$ を通ることは分かっているので，「傾き」さえ分かれば問題は解決します．



解　円の中心 $(0,\ 0)$ と点 $(4,\ -3)$ を通る直線の傾きは $-\dfrac{3}{4}$ である．求める接線はこの直線に垂直なので，傾きは $\dfrac{4}{3}$．よって，求める接線の方程式は

$$y-(-3)=\frac{4}{3}(x-4)$$

$$\therefore\ 4x-3y=25$$

できた〜　OK　わりとカンタンやな

■

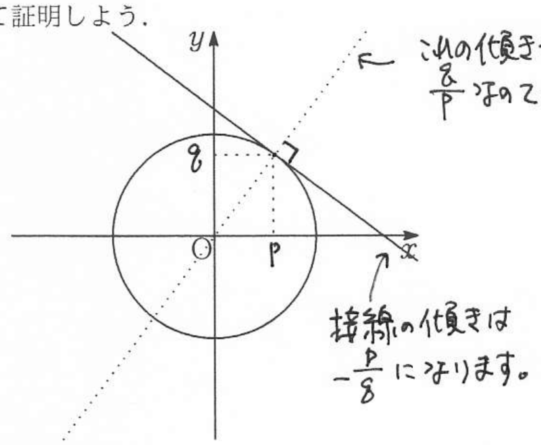
円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(4,\ -3)$ における接線の方程式が $4x-3y=25$ であることがわかりましたが，この結果を見るとなにやら法則がありそうです

実は次のような公式があります．　やっぱり〜

▷Point◁

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線は，$px+qy=r^2$ である．

この公式はとても重要なので必ず覚えて，使えるようにしておこう．証明は，先ほどの具体例を一般化するだけですが，接線が軸に平行になる場合に注意して証明しよう．



解　点 P が座標軸にない場合を考える．直線 OP の傾きは $\dfrac{q}{p}$ である．求める接線は直線 OP に垂直なので，傾きは $-\dfrac{p}{q}$．よって，求める接線の方程式は

$$y-q=-\frac{p}{q}(x-p)$$

具体例でやってるからわかりやすいね

$$px+qy=p^2+q^2$$

点 $(p,\ q)$ は円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点なので，　うん

$$p^2+q^2=r^2$$ ← これがポイント!!

したがって，求める接線の方程式は，

$$px+qy=r^2\ \cdots(※)$$

完成〜!!

である．

次に，点 P が座標軸上にある場合を考える．

$\mathrm{P}(\pm r,\ 0)$ のとき，円の接線は $x=\pm r$，

$\mathrm{P}(0,\ \pm r)$ のとき，円の接線は $y=\pm r$，

いちおう確認しておこう

なので，これらの場合も (※) を満たしている．

よって，(※) は全ての P に対して成立する．

■

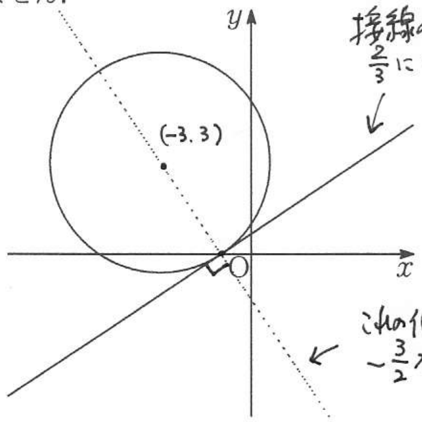
参考　公式の覚え方ですが，「$x^2+y^2=r^2$ を $x\cdot x+y\cdot y=r^2$ とみて，x と y をそれぞれ 1 個 p と q に置き換える」と考えると良いでしょう．この発想は，今後，楕円や双曲線の接線を考えるときにも使えます．

$$\underset{\downarrow}{x}\cdot x+\underset{\downarrow}{y}\cdot y=r^2$$
$$px+qy=r^2$$

はーい　あくまでも覚え方のイメージです．

例題 2.　円 $x^2+y^2+6x-6y+5=0$ 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ．

考え方　$x^2+y^2+6x-6y+5=0$ より，$(x+3)^2+(y-3)^2=13$ なので，中心が原点ではありません．よって，先ほどの公式をそのまま使うことはできないので，フツーにコツコツやるしかありません．



接線の傾きは $\frac{2}{3}$ になります.

これの傾きが $-\frac{3}{2}$ なので

解　$x^2+y^2+6x-6y+5=0$ より

$(x+3)^2+(x-3)^2=13$

よって，中心 $(-3,\ 3)$ の円である．

円の中心 $(-3,\ 3)$ と点 $(-1,\ 0)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{3-0}{-3-(-1)}=-\dfrac{3}{2}$ である．求める接線はこの直線に垂直なので，傾きは $\dfrac{2}{3}$．よって，求める接線の方程式は

$$y-0=\frac{2}{3}(x+1)$$

$$\therefore\ 2x-3y+2=0$$

公式は使えないけど考え方は　さきほどと全く同じですね

うん　これもできそう

■

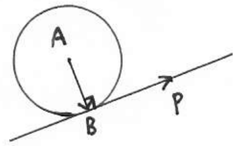
注　円の式に $y=0$ を代入すると，

$x^2+6x+5=0$．$(x+1)(x+5)=0$ より，$x=-1,\ -5$．つまり点 $(-1,\ 0)$ は円と x 軸との交点のことでした．

注　中心が原点でない場合の円の接線の公式もないわけではありませんが，ちょっと複雑で覚えにくいので，上の方法でやったほうが確実です．

参考　ベクトルを用いればこの問題は一瞬で解くことができます．図形を「ある条件を満たす点の集まり」と考えます．これはとても重要な考え方なので，参考までに紹介しよう．

別解　円の中心を A，接点を B とおくと，求める接線は



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$

を満たす点 P の集まりである．$P(x,\ y)$ とおくと，$A(-3,\ 3)$，$B(-1,\ 0)$ なので，

$\overrightarrow{AB}=(2,\ -3)$，$\overrightarrow{BP}=(x+1,\ y)$

よって，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}=2(x+1)-3y=0$$

よって，$2x-3y+2=0$

この解き方はなかなかすごいぞ

ムムム

まさかベクトルが登場するとは….

■

数学っておもしろいね

うん

2　円外の点から引いた接線

今度は円外の点から引いた接線の方程式を求めてみよう．これには様々な解法が考えられます．勉強のためにイロイロ解き比べてみよう．

例題 3.

点 $(-2,\ 4)$ を通り，円 $x^2+y^2=10$ に接する直線の方程式を求めよ．

考え方　大きく分けて 2 通りのアプローチがあります．

方針 ①　傾きを設定する方法

方針 ②　接点を設定する方法

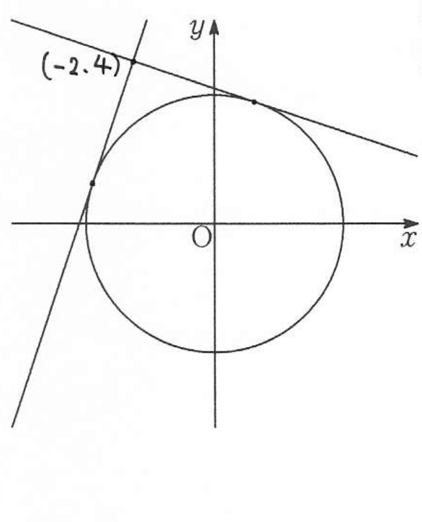
フムフム

です．さらに，方針 ① には 2 通りの解法があるので，全部で 3 通りの解法があります．

全てのパターンで解いてみましょう．その後，どの解法がベストなのか自分で判断してください．

解 1. と **解** 2. が 方針 ①，

解 3. が 方針 ② です．



あたりまえやけど接線は 2本あるよね…

うん　そりゃそうやわ