解 1. 求める接線は y 軸に平行ではないので,

$$y-4=m(x+2)$$

→ このことわりは必要です

とおくことができる.

円の中心 (0, 0) から直線への距離 d は, $mx-y+2m+4=0$ より

$$d=\frac{|2m+4|}{\sqrt{m^2+1}}$$

← 点と直線の距離の公式にあてはめるだけ

よって, 円と直線が接するとき, この距離が円の半径に等しくなるので

$$\frac{|2m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$$

$$|2m+4|=\sqrt{10(m^2+1)}$$

両辺≧0なので2乗できます

$$(2m+4)^2=10(m^2+1)$$

$$4m^2+16m+16=10m^2+10$$

フムフム

$$6m^2-16m-6=0$$

$$3m^2-8m-3=0$$

$$(3m+1)(m-3)=0$$

$$\therefore\ m=-\frac{1}{3},\ 3$$

無事に2本求まりました.

よって, 求める接線の方程式は

$m=-\frac{1}{3}$ のとき, $-\frac{1}{3}x-y+\frac{10}{3}=0$.

$m=3$ のとき, $3x-y+10=0$.

■

解 2. 求める接線は y 軸に平行ではないので,

$$y-4=m(x+2)$$

→ やっぱりこのことわりは必要です.

とおくことができる.

$y=mx+2m+4$ とし, $x^2+y^2=10$ に代入すると

$$x^2+(mx+2m+4)^2=10$$

$$x^2+m^2x^2+2m(2m+4)x+(2m+4)^2=10$$

$$(1+m^2)x^2+4m(m+2)x+4m^2+16m+6=0$$

円と直線が接するとき, この2次方程式が重解をもてばよいので, 判別式を D とすると, $D=0$ より,

$$4m^2(m+2)^2-(1+m^2)(4m^2+16m+6)=0$$

$$4m^2(m^2+4m+4)$$
$$-(4m^2+16m+6+4m^4+16m^3+6m^2)=0$$

この計算はかなりヤバそう…

マジっすか? これでエエの?

$$4m^4+16m^3+16m^2$$
$$-(4m^2+16m+6+4m^4+16m^3+6m^2)=0$$

$$6m^2-16m-6=0$$

$$3m^2-8m-3=0$$

$$(3m+1)(m-3)=0$$

$$\therefore\ m=-\frac{1}{3},\ 3$$

m^4 や m^3 がぜーんぶ消えました!!

ヤッター さっきと全く同じ式になりましたよ

よって, 求める接線の方程式は

$m=-\frac{1}{3}$ のとき, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$.

$m=3$ のとき, $y=3x+10$.

■

接点をおく!!

解 3. 接点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とおく.

点Pにおける接線の方程式は, $px+qy=10$

これは公式!!

この直線が点 $(-2,\ 4)$ を通るので

$$-2p+4q=10$$

つまり, $p=2q-5$ … ①

また点Pは円上にあるので

$$p^2+q^2=10 \quad \cdots ②$$

① を ② に代入すると

$$(2q-5)^2+q^2=10$$

$$5q^2-20q+25=10$$

$$q^2-4q+3=0$$

$$(q-1)(q-3)=0$$

$$\therefore\ q=1,\ 3$$

計算も全然たいしたことないね

うん さっきと大違い

$q=1$ のとき, $p=-3$ なので求める接線は

$$-3x+y=10$$

$q=3$ のとき, $p=1$ なので求める接線は

$$x+3y=10$$

もう終わり? スゲ～ メッチャカンタンや～

■

考察

3つの解法を比べてみてどうでしょうか.

計算の煩雑さから **解 2.** はあまり現実的ではありませんね.

また, **解 1.** と **解 2.** には決定的な弱点があります. それは, **接点の座標が分からない**ということです. もし「接点の座標を求めよ」という問題が追記されていたら, 接線を求めた後に, 再び連立して計算せねばなりません.

そうやな… 結局やらなあかんのか…

それに対して，**解** 3. はどうでしょうか．シンプルで上手い解法だと思いませんか．しかも接点の座標も分かりますし，まさに一石二鳥です．ぜひともこの解法をマスターしよう．

これが最大のメリット!!

はーい もっちろーん

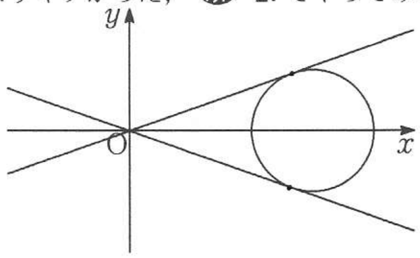
最後に，中心が原点ではない円の外から引いた接線を求めてみよう．

> **例題 4.**
> 円 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ の接線で原点を通るものを求めよ．

考え方 まず，例題 2. でやったように，中心が原点でない円の接線の公式はないので，残念ながら，先ほどのベスト解法 **解** 3. は使えません．となれば，**解** 1. か **解** 2. でやることになります．

マジで? いやな予感…

今回の場合，接線が原点を通るので，素直に $y = ax$ とでもおいて計算すれば，**解** 1. や **解** 2. でも，計算はそれほどキツクはありません．先ほどかなりキツかった，**解** 2. でやってみます．



解 求める接線は y 軸に平行ではないので，$y = ax$ とおく．

$x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ に代入すると

$x^2 + a^2x^2 - 6x + 8 = 0$

$(1 + a^2)x^2 - 6x + 8 = 0$

円と直線が接するとき，この 2 次方程式が重解をもてばよいので，判別式を D とすると，$D = 0$ より，

$9 - 8(1 + a^2) = 0$

$a^2 = \dfrac{1}{8}$　　$\therefore$　$a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

よって，求める接線は，$y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$

アレッ? 意外にカンタン

たいしたことない

■

注 なお，接点の座標は $\left(\dfrac{8}{3},\ \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

→これは各自で求めとこう

3　円の極線

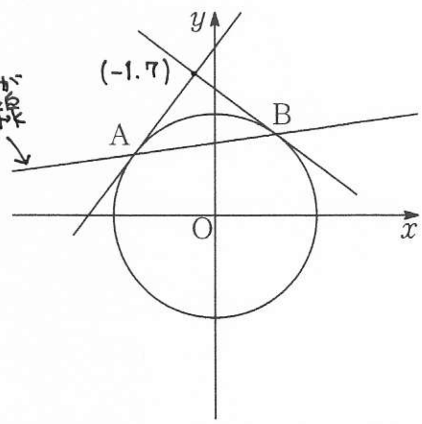
円外の点からは 2 本の接線を引いたときの 2 つの接点を通る直線を円の極線といいます．

> **例題 5.**
> 点 $(-1,\ 7)$ を通り，円 $x^2 + y^2 = 25$ に接する 2 つの直線の接点を A，B とする．直線 AB の方程式を求めよ．

考え方 原点中心の円外の点から引いた接線なので，例題 3 の **解** 3 の方法をとれば，2 つの接点の座標を求めることができます．そうすれば単なる 2 点を通る直線の方程式を求めるだけなのでどうってことありませんね．それじゃあ面白くないので，ここでは接点の座標を求めることなく，2 つの接点を通る直線の方程式を求めてみよう．

おもしろいやり方があるのね… ワクワク

これが極線



解 接点 A の座標を $(a,\ b)$，接点 B の座標を $(c,\ d)$ とする．

A における接線の方程式は $ax + by = 25$.
B における接線の方程式は $cx + dy = 25$.

← 公式!!

これらはいずれも点 $(-1,\ 7)$ を通るので，

$$\begin{cases} -a + 7b = 25 & \cdots ① \\ -c + 7d = 25 & \cdots ② \end{cases}$$

フムフム

が成立する．

さて，ここで

$$-x + 7y = 25 \cdots ③$$

という式を考えると，

① は ③ に $x = a,\ y = b$ を代入したもの，
② は ③ に $x = c,\ y = d$ を代入したもの，

この部分の考え方が最大のポイント

オモロ〜

と考えることができる．このことはすなわち，直線 ③ が 2 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(c,\ d)$ を通っていることを意味している．

よって，2 点 A，B を通る直線の方程式は ③，つまり，$-x + 7y = 25$ である．

■

これはスゴイ!! 実に美しい解答!! 感動…