軌跡の３つの有名問題

～数式的考察と図形的考察の狭間～

とても大切な問題ですよ～

軌跡の問題を考えるときのキホンは次の通りでした．

▷Point◁（キセキのキホン）

「点Ｐの軌跡を求めよ」と言われたら

Step ①　とりあえず $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおく．

Step ②　$X,\ Y$，パラメータの間の関係式をつくる．

Step ③　パラメータを消去して X と Y だけの式をつくる．この式が点Ｐの軌跡を表す方程式である．

最後に，軌跡には限界（範囲）がある可能性があるので，そのことの考察を必ず行う．

たいていの問題は，このキホンに従って機械的に解き進めていくことができますが，中には，セオリー通りには行かない厄介な問題があります．その中から有名な問題を３問紹介しよう．

例題 1　xy 平面において，直線 $l : x+t(y-3)=0,\ m : tx-(y+3)=0$ を考える．t が実数全体を動くとき，l と m の交点はどんな図形を動くか．

考え方　この問題に対して，次のように解いてしまう人が結構多いのです．それは，まず交点の座標をパラメータ t で表してから，t を消去しようとするのですが・・・　うん．こうしてしまうわ…

解？　交点を $(X,\ Y)$ とおく．

$$\begin{cases} X+t(Y-3)=0 & \cdots ① \\ tX-(Y+3)=0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$X=t(3-Y)$．これを ② に代入．

$t^2(3-Y)-(Y+3)=0$

$(t^2+1)Y=3(t^2-1)$．

$\therefore\ Y=\dfrac{3(t^2-1)}{t^2+1}\ \cdots ③$　　できないよ～　いやや～　う～ん

よって，

$X=t\left(3-\dfrac{3(t^2-1)}{t^2+1}\right)=\dfrac{6t}{t^2+1}\ \cdots ④$

③，④ より t を消去すると・・・・

「先生，どうやったら t を消去できるんですか？」という質問が後を絶ちません．方針としては間違ってないんですが，なかなか t が消えないのでこの方法はちょっとムリです（ある裏ネタを知ってれば簡単に消去できるんですが・・・）．

もう一度，最初の ▷Point◁ を見てください．

Step ② は

$X,\ Y$，パラメータの間の関係式をつくる

と言っているのであって，

$X,\ Y$ をパラメータを用いて表せ

とは言っていません．あくまでもパラメータを消去するのが目標なので，$X,\ Y$ をパラメータで表す必要はないのです．

交点を $(X,\ Y)$ とおくと，関係式は，

$$\begin{cases} X+t(Y-3)=0 \\ tX-(Y+3)=0 \end{cases}$$

だけです．これらの関係式（つまりは連立方程式）から t を消去して，X と Y の関係式を作り出せば良いのです．　そーゆーことかー

解　交点を $(X,\ Y)$ とおく．

$$\begin{cases} X+t(Y-3)=0 & \cdots ① \\ tX-(Y+3)=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より，$tX=Y+3$．　この場合分けがポイント!!

(i)　$X \neq 0$ のとき，

$t=\dfrac{Y+3}{X}$．これを，① に代入すると，

$X+\dfrac{Y+3}{X}(Y-3)=0$

$X^2+(Y+3)(Y-3)=0$

$X^2+Y^2=9\ \cdots ③$

③ において $X=0$ とすると，$Y=\pm 3$．

よって，このとき求める交点の軌跡は円 ③ から２点 $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$ を除いた図形である．

フムフム

(ii) $X=0$ のとき，　場合分け!!

② より，$Y=-3$.

$X=0$, $Y=-3$ を ① に代入すると，$t=0$.

すなわち，点 $(0,\ -3)$ は $t=0$ のときの２直線の交点である．

(i)(ii) より，交点の軌跡は，円 $x^2+y^2=9$ から点 $(0,\ 3)$ を除いた図形である．

■

✎注　(i) では，$X \neq 0$ なので，円上の２点 $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$ を除いていますが，(ii) の考察で，点 $(0,\ -3)$ は $t=0$ のときの交点として確かに存在することがわかったので，最終的に，点 $(0,\ -3)$ は軌跡に含め，点 $(0,\ 3)$ は除外したままになるのです．

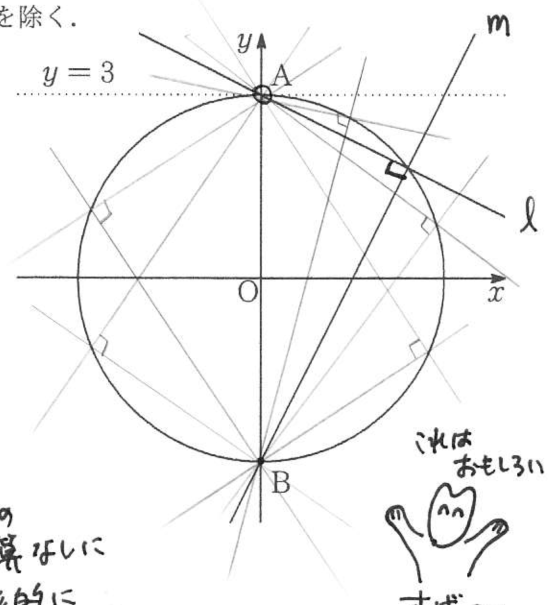
参考　この問題は次のような図形的な考察によっても解答することができます．

別解

直線 $l: x+t(y-3)=0$ は，t の値に関わらず点 $\mathrm{A}(0,\ 3)$ を通り，直線 $m: tx-(y+3)=0$ は，t の値に関わらず点 $\mathrm{B}(0,\ -3)$ を通っている．

また，直線 l の方向ベクトルは $(-t,\ 1)$，直線 m の方向ベクトルは $(1,\ t)$ であり，これら２つのベクトルは内積の値が０になるので，直線 l と m は直交する．つまり，A を通る直線 l と B を通る直線 m が常に直交するように変化するので，交点の軌跡は，２点 A，B を直径の両端とする円である．

ただし，l は直線 $y=3$ を，m は直線 $x=0$ を表すことができないから，この２直線の交点 $(0,\ 3)$ を除く．



一切の計算なしに図形的に軌跡が求まりましたね

これはおもしろい!!

すげ～

■

✎注　２直線が常に直交しながら変化することを，円周角の性質にうまく結びつけています．ほとんど計算することなしに図形的な考察だけで，軌跡を求めていますが，軌跡の限界（「点 $(0,\ 3)$ を除く」こと）がちょっと分かりづらいかもしれません．ていうか，そもそも気がつかないかもしれません．そういう点において，考え方としては面白いものの，きちんと処理するには最初の **解** の方が良いかもしれませんね．

> **例題 2**　円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=2x+k$ が異なる２点 P，Q で交わっている．
> (1)　k の値の範囲を求めよ．
> (2)　線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ．

考え方　(1) は特に問題ないでしょう．先にこの場で軽くやっときます．連立して整理すると，

$$5x^2+4kx+k^2-4=0 \cdots\cdots (※)$$

判別式 $D/4>0$ より，$-2\sqrt{5} \leqq k \leqq 2\sqrt{5}$.

✎注　点と直線の距離の公式を利用してもよいです．　はーい，もちろん知ってまーす

(2)　とりあえずは中点の座標を k で表そう．**例題 1** では交点の座標を求めると悲惨なことになりましたが，今回は中点の座標がシンプルな形で表すことができそうです．(※) の解が円と直線の交点の x 座標を表しているので，実際に解いて考えても良いし，解と係数の関係をうまく使ってラク～にやっても構いません．僕はもちろんラク～にやりたいね．

解　(2)　交点の x 座標を α, β とおくと，α, β は (※) の２つの解なので，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-\dfrac{4k}{5}$.

中点 M を $(X,\ Y)$ とおくと，

$$\begin{cases} X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-\dfrac{2k}{5} \\ Y=2X+k=2\left(-\dfrac{2k}{5}\right)+k=\dfrac{k}{5} \end{cases}$$

よって，$Y=-\dfrac{X}{2}$.

また，$-2\sqrt{5} \leqq k \leqq 2\sqrt{5}$ より，

$-\dfrac{4\sqrt{5}}{5} \leqq X \leqq \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

よって，求める中点の軌跡は，

直線 $y=-\dfrac{x}{2}$ $\left(-\dfrac{4\sqrt{5}}{5} \leqq x \leqq \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

これはカンタンや　OK

交点も，軌跡の制限もすぐにわかる～