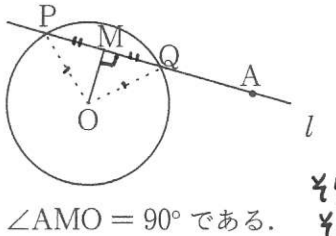
参考 この問題は中点をパラメータで表してからパラメータを消去するというセオリー通りで解決しましたが，図形的に解釈することもできます．

そのためには，次の事実が重要です．

▷Point◁

円 C と直線 l が 2 点 P, Q で交わるとき，弦の中点を M とすると，直線 OM と直線 l は直交する．



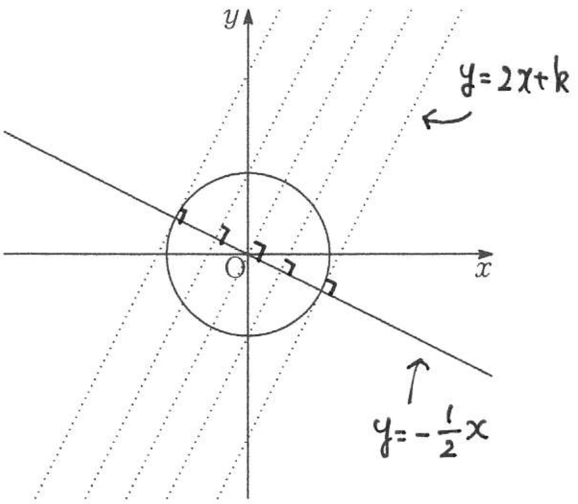
つまり，$\angle \mathrm{AMO} = 90^\circ$ である．

そりゃそうや

三角形 OPQ が二等辺三角形なので当然ですね．

このことを利用すれば，直線 $y = 2x + k$ が傾き 2 で一定なので，もとめる中点は傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線上にあることがわかります．

下の図をみれば状況は明らかでしょう（分かりやすいように直線 $y = -\dfrac{1}{2}$ のグラフを制限なしに書いていますが，実際には円の内部のみです）．



次の問題は先ほどの **例題 2** とほとんど同じですが，難易度が天と地ほどの差があります．

さっきと同じとちゃうの？

例題 3 円 $x^2 + y^2 = 4$ と直線 $y = kx + 4$ が異なる 2 点 P, Q で交わっている．

(1) k の値の範囲を求めよ．

(2) 線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ．

なんで〜？

考え方 (1) は特に問題ないでしょう．先にこの場で軽くやっときます．

円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $kx - y + 4 = 0$ との距離 d は

さっきとちがって今回は点チョクを利用してみます。

$$d = \frac{|4|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}}$$

円 $x^2 + y^2 = 4$ と直線 $kx - y + 4 = 0$ が異なる 2 点で交わるのは，$d <$ (半径) のときだから，

$$\frac{4}{\sqrt{k^2+1}} < 2$$

よって，$\sqrt{k^2+1} > 2$．両辺 > 0 なので 2 乗して整理すると，$k^2 - 3 > 0$

$$\therefore\ \ k < -\sqrt{3},\ \ \sqrt{3} < k$$

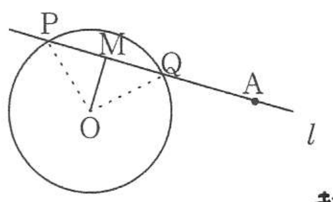
注 $x^2 + y^2 = 4$ に $y = kx + 4$ を代入して判別式 $D > 0$ で求めることもできます．

次に (2) について．**例題 2** では中点の座標をパラメータで表しましたが，今回の場合は，中点の座標がかなりややこしくなるので（後ほど紹介します），そこからパラメータを消去するのはほぼ絶望的です．したがって，今回は最初から図形的考察をしよう．

そのためには，先ほど紹介した次の事実が重要です．もう一度，紹介します．

▷Point◁

円 C と直線 l が 2 点 P, Q で交わるとき，弦の中点を M とすると，直線 OM と直線 l は直交する．



つまり，$\angle \mathrm{AMO} = 90^\circ$ である．

またか．知ってるもーん

このことを用いれば，求める軌跡は図形的な考察から簡単に求めることができます．

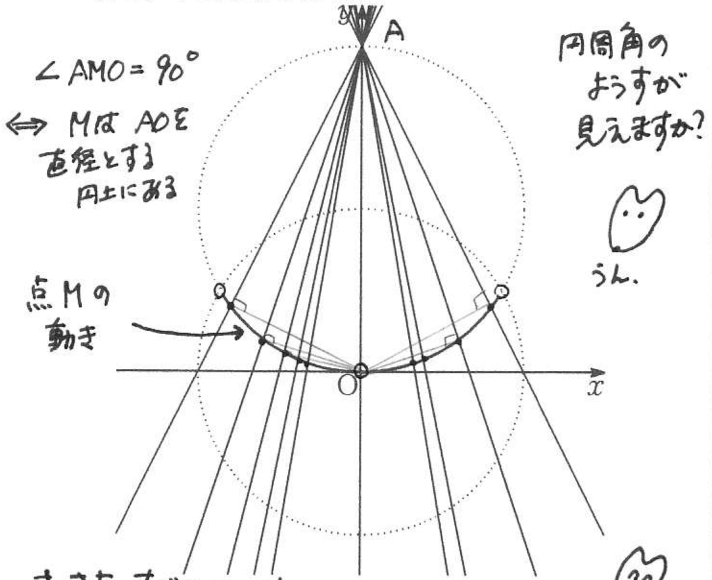
解

A$(0,\ 4)$ とすると，k の値に関わらず，

$$\angle \mathrm{AMO} = 90^\circ$$

ここで，直線 $y = kx + 4$ は y 軸と平行になることはないから，M と原点 O が一致することはない．

これより，点 M の軌跡は AO を直径とする円のうち円 $x^2+y^2=4$ の内部の点と原点を除いた部分で，下図のようになる．



さっきもすごかったけど
今度の図形的な考え方は、もーっとスゴイぞ

■

✎注　先ほどの ▷Point◁ より，中点 M が常に ∠AMO = 90° を満たしながら変化することに注目し，ここでもやはり円周角の性質にうまく結び付けています．軌跡の限界も明解で，図形的考察が有効であることが分かります．

参考　図形的考察ではなく計算で処理するとどうなるのか見てみよう．

例題 1　と同様に，やはり中点 M の座標を求めるのではなく，関係式からパラメータ k を消去します．関係式から k を消去するのは特に問題ないと思いますが，X や Y の範囲（つまり「軌跡の限界」）を調べるのが難しいです．

別解

PQ の中点 M を $(X,\ Y)$ とおく．(1) より $k \neq 0$ なので，M は直線 $y=kx+4$ と，原点を通りこの直線と直交する直線 $y=-\dfrac{1}{k}x$ との交点である．

$$\begin{cases} Y=kX+4 & \cdots ① \\ Y=-\dfrac{1}{k}X & \cdots ② \end{cases}$$

② において $Y=0$ とすると $X=0$ となり，① が成立しない．よって，$Y \neq 0$．

このとき，② より，$k=-\dfrac{X}{Y}$ なのでこれを ① に代入すると，

$$Y=-\frac{X}{Y}X+4$$

よって，$X^2+Y^2-4Y=0$．$X^2+(Y-2)^2=4$

また，② より，$X=-kY$ なので ① に代入して，$Y=-k^2Y+4$．

$(1+k^2)Y=4$ より，$Y=\dfrac{4}{1+k^2}>0$

(1) より，$k^2>3$ なので，$1+k^2>4$ より $\dfrac{4}{1+k^2}<1$．よって，$0<Y<1$．

したがって求める軌跡は，

円 $x^2+(y-2)^2=4$ $(0<y<1)$ である．

うーん

■

✎注　厳密にはこの解答では不十分です．なぜなら X の範囲を調べてないからです．円の場合，X と Y のどちらの範囲をも調べないと正確に図示することはできません．

ちなみに，X と Y を k を用いて表すと，

あー これが一番最初に出てきたやつや

$$X=-\frac{4k}{1+k^2},\qquad Y=\frac{4}{1+k^2}$$

となります．k の値の範囲から X や Y の範囲（つまり「軌跡の限界」）を調べるために，**別解** では k が分母にだけ入っている Y を使ったのです．しかしながら、X の範囲を求めるのはちょっと無理です（数学 Ⅲ の微分を用いて，k についての分数関数 $X=-\dfrac{4k}{1+k^2}$ のグラフを．考えればできますけど）．だから，**別解** では不十分であると言わざるとえません．

このように軌跡の限界を求めるのがちょっと難しいので，本問の場合は，計算で処理するよりも図形的な考察で解いたほうが良いと思われます．

そうですネ

最後に

軌跡の有名問題を３問紹介しました．交点を求めた方が良かったり，求めない方が良かったり，図形的考察をした方が良かったり，図形的考察をしない方が良かったり，実に様々な解法があって混乱したかもしれませんが，基本的にはどの方法でも解くことができます．大切なことは自分で様々な方法を試し，その長所短所を自分なりに理解して「だから，この解法でやった方がエエんやな」と自分で納得することです．「この問題はこのように解きなさい」と，言われるがままに解いているようでは，残念ながら本当に身にはつかないでしょうね．

頑張ってください．

はーい
がんばりまーす