点と直線の距離の公式

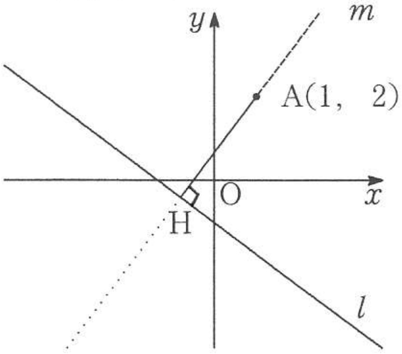
とてもとても
大切な公式です

いきなりですが，次の問題を考えてみよう．

> **例題**
>
> 点 A(1, 2) と直線 $l : 3x+4y+4=0$ の距離を求めよ．

考え方 数学において「距離」とは最短距離を意味するので，点と直線の距離とは，その点から直線へ下ろした垂線の長さのことです． フムフム

よって，点 A を通り直線 l に垂直な直線 m を考え，l と m の交点 H を求めます．AH の長さが求める「距離」です．



点Hを求めて
AHの長さを
計算するだけか…

流れはわかった!!

解 点 A を通り，直線 l に垂直な直線を m とする．l の傾きが $-\dfrac{3}{4}$ なので，m の傾きは $\dfrac{4}{3}$ である．よって，m の方程式は

$$y-2=\frac{4}{3}(x-1) \quad \therefore \quad 4x-3y+2=0$$

次に，l と m の交点 H を求める．

$$\begin{cases} 3x+4y+4=0 & \cdots① \\ 4x-3y+2=0 & \cdots② \end{cases}$$

①×3＋②×4 より，

$25x+20=0 \quad \therefore \quad x=-\dfrac{4}{5}$

①×4－②×3 より，

$25y+10=0 \quad \therefore \quad y=-\dfrac{2}{5}$

したがって，$\mathrm{H}\left(-\dfrac{4}{5},\ -\dfrac{2}{5}\right)$ である．

$$\mathrm{AH}^2=\left(1+\frac{4}{5}\right)^2+\left(2+\frac{2}{5}\right)^2=\frac{81+144}{25}=9$$

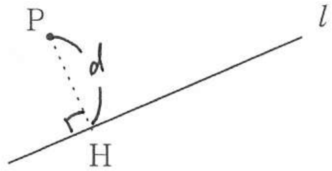
より，AH＝3．

よって，求める距離は 3 である． ■

できた～

やってることは単純ですが，計算がややメンドウです．そこで次の公式を紹介しよう．

便利な公式が
あるなら．先に
教えてよ～

> **▷Point◁**
>
> 点 P(p, q) と直線 $l : ax+by+c=0$ との距離は
>
> $$d=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
>
> で表される．
>
> 
>

おぼえにくそう…
ムムム…

先ほどの **例題** に当てはめてみると，

$$d=\frac{|3\cdot1+4\cdot2+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3$$

はやっ!!

と簡単に求まりますね．証明も全く同じです．$a \fallingdotseq 0$ かつ $b \fallingdotseq 0$ としてやってみましょう．

解 直線 l の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ なので，点 P を通り，l に垂直な直線 m は

$$y-q=\frac{b}{a}(x-p)$$

$$\therefore \quad bx-ay+aq-bp=0$$

である．l と m の交点 H を求める．

$$\begin{cases} ax+by+c=0 & \cdots① \\ bx-ay+aq-bp=0 & \cdots② \end{cases}$$

①×a＋②×b より，

$(a^2+b^2)x+ac+abq-b^2p=0$

$$\therefore \quad x=\frac{b^2p-abq-ac}{a^2+b^2}$$

①×b－②×a より，

$(b^2+a^2)y+bc-a^2q+abp=0$

$$\therefore \quad y=\frac{a^2q-abp-bc}{a^2+b^2}$$

よって，交点 H の座標は

$$\mathrm{H}\left(\frac{b^2p-abq-ac}{a^2+b^2},\ \frac{a^2q-abp-bc}{a^2+b^2}\right)$$

文字がゴチャゴチャ
してるけど
やってることは
左側の例と
全く同じですね

そう言われても…
しんどいわ

求める距離 d は垂線 AH の長さなので，

$$d^2=\left(\frac{b^2p-abq-ac}{a^2+b^2}-p\right)^2+\left(\frac{a^2q-abp-bc}{a^2+b^2}-q\right)^2$$
$$=\left(\frac{-abq-ac-a^2p}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{-abp-bc-b^2q}{a^2+b^2}\right)^2$$
$$=a^2\left(\frac{ap+bq+c}{a^2+b^2}\right)^2+b^2\left(\frac{ap+bq+c}{a^2+b^2}\right)^2$$
$$=(a^2+b^2)\left(\frac{ap+bq+c}{a^2+b^2}\right)^2$$
$$=\frac{(ap+bq+c)^2}{a^2+b^2}$$

落ち着いて計算しよう。

決してむつかしくないよ

したがって，$d=\dfrac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　…（※）　■

b=0の場合を確認しよう。

l: $ax+c=0$ より $x=-\dfrac{c}{a}$

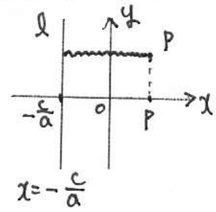
（y軸に平行な直線）

よって l と P(p, q) の距離は

$\left|p-\left(-\dfrac{c}{a}\right)\right|=\left|p+\dfrac{c}{a}\right|=\left|\dfrac{ap+c}{a}\right|=\dfrac{|ap+c|}{|a|}$

これは（※）の式で $b=0$ とした式に一致している。つまり（※）は $b=0$ のときも成立する。

（$a=0$ の場合の確認は各自でやっといて下さい）



➾注　なお，この公式は，a，b のどちらか一方が 0 の場合も成り立っています．確認しといてください．

別解 1.　もう少し上手に証明してみよう．　ヤッター

H$(x_0,\ y_0)$ とします．

要するに，$\sqrt{(x_0-p)^2+(y_0-q)^2}$ を計算すればよいのだから，最初から x_0-p や y_0-q を「ひとまとめ」に考えてみよう．

まず，H は直線 m 上にあるので

$$y_0-q=\frac{b}{a}(x_0-p)$$

よって，$b(x_0-p)-a(y_0-q)=0$.

x_0-p と y_0-q をひとまとめに考えます

また，H は直線 l 上にもあるので

$$ax_0+by_0+c=0$$

この両辺から $ap+bq$ を引いて整理すると，

$$a(x_0-p)+b(y_0-q)=-(ap+bq+c)$$

見やすくするために，$x_0-p=X$，$y_0-q=Y$ とおくと，

$$\begin{cases}bX-aY=0 & \cdots③\\ aX+bY=-(ap+bq+c) & \cdots④\end{cases}$$

この連立方程式を解けば，（ゆりとカンタンに解けます）

$$X=\frac{-a(ap+bq+c)}{a^2+b^2},\ Y=\frac{-b(ap+bq+c)}{a^2+b^2}$$

よって，

$$X^2+Y^2=(a^2+b^2)\left(\frac{ap+bq+c}{a^2+b^2}\right)^2$$
$$=\frac{(ap+bq+c)^2}{a^2+b^2}$$

したがって，$d=\sqrt{X^2+Y^2}=\dfrac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

なかなか上手いやり方ですなあ　おもろー　■

別解 2.　さらに上手く証明してみよう．先ほどの式 ③ で，$bX-aY=$ より，$X:Y=a:b$ なので，$X=ak$，$Y=bk$ とおきます．

比例式の考え方です

これを，式 ④ に代入すると，

$$a^2k+b^2k=-(ap+bq+c)$$
$$k=\frac{-(ap+bq+c)}{a^2+b^2}$$

よって，

$$d=\sqrt{X^2+Y^2}$$
$$=\sqrt{(a^2+b^2)k^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}|k|$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left|\frac{-(ap+bq+c)}{a^2+b^2}\right|$$
$$=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

これはスゴイ　感動…

■

「点と直線の距離の公式」は，高校数学全分野を通して，Best3 に入る超重要公式です．必ず覚えて，いつでも使える状態にしておこう．

参考　驚くべきことに，2013 年の大阪大学（文系）で「点と直線の距離の公式を証明せよ」という問題が出題されました．大半の受験生にとって常識であるこの公式も，いきなり「証明せよ」と言われたら，戸惑った受験生も多かったことでしょう．

おそらくムリっす…

この公式に限らず，教科書に載っている定理や公式は証明方法からきちんと理解しておいた方が良さそうです．

はーい　しっかり見ときまーす