点と直線の距離の公式について

円と直線の位置関係とか 円の弦の長さを求めるときとか、しょっちゅう使う〜

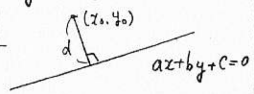
点と直線の距離の公式は高校数学の中でも使用頻度の高い重要公式の1つなので覚えている人も多いと思いますが、その証明は？となると意外に難しいものです。

そういえば知らんなあ〜

▷Point◁

点(x_0, y_0)と直線$ax+by+c=0$の距離dは、

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



(注)数学で"距離"といえば最短距離のことです。よって点と直線の距離とはその点から直線へおろした垂線の長さのことになります。

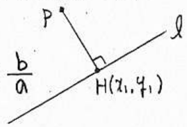
このように、点と直線の距離の公式では、直線の方程式は$ax+by+c=0$という一般形で使われます。よって教科書などでも、いきなり$ax+by+c=0$の場合で証明しています。

これが？マジ？

<一般的な証明方法>（いろいろ比較して一番わかりやすい証明がこれです）

点$P(x_0, y_0)$から直線$l: ax+by+c=0$におろした垂線の足を$H(x_1, y_1)$とする。

このとき $\begin{cases} PH\perp l & \cdots① \\ H\text{は}l\text{上に存在する} & \cdots② \end{cases}$ の2つが成立する。



$a\neq0$ かつ $b\neq0$ のとき、①より、lの傾きが$-\frac{a}{b}$なので、PHの傾きは$\frac{b}{a}$

よって $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{b}{a}$　∴ $\frac{x_1-x_0}{a}=\frac{y_1-y_0}{b}$ …(※)

この比例式(※)の値をkとおくと

$$x_1-x_0=ak,\quad y_1-y_0=bk$$

$$\therefore\ x_1=x_0+ak,\quad y_0=y_1+bk$$

よって $H(x_0+ak,\ y_0+bk)$

②よりHがl上に存在するので

$$a(x_0+ak)+b(y_0+bk)+c=0$$

$$(a^2+b^2)k=-(ax_0+by_0+c)$$

$$\therefore\ k=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

$$\begin{aligned}PH&=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\\&=\sqrt{(ak)^2+(bk)^2}\\&=\sqrt{(a^2+b^2)k^2}\\&=\sqrt{a^2+b^2}\,|k|\\&=\sqrt{a^2+b^2}\times\left|-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right|\\&=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad\cdots(☆)\end{aligned}$$

$a=0$のとき、$by+c=0$より $y=-\frac{c}{b}$。よって$P(x_0, y_0)$との距離は $\left|y_0+\frac{c}{b}\right|=\frac{|by_0+c|}{|b|}$

よって(☆)に$a=0$を代入したものに一致する。

$b=0$のとき $ax+c=0$より $x=-\frac{c}{a}$。よって$P(x_0, y_0)$との距離は、$\left|x_0+\frac{c}{a}\right|=\frac{|ax_0+c|}{|a|}$

よって(☆)に$b=0$を代入したものに一致する。

∴(☆)はa、bどちらかが0の場合も成立する。よって証明終 //

なかなかウマイ証明ですが、本来、$ax+by+c=0$の場合の証明は、法線ベクトルやベクトル方程式の考え方を用いるのが普通です（実は、上の証明にも、それらのことがベースにあります）。よって今回は、最もシンプルで基本的な直線$y=mx$の場合に証明し、その後、$ax+by+c=0$の形に拡張したいと思います。

▷Point◁

点$P(p, q)$と直線$l: y=mx$の距離は $\dfrac{|mp-q|}{\sqrt{1+m^2}}$

かなりシンプルになりましたね

今回は、これを7通り(!!)の方法で証明したいと思います。

え〜よ そんなにいらん。

（証明）まず初めに$m=0$の場合を証明する。

このとき、点$P(p, q)$と直線$l: y=0$の距離は$|q|$であり、これは$\dfrac{|mp-q|}{\sqrt{1+m^2}}$に$m=0$を代入したものに一致している。つまり、$m=0$のとき成立している。

よって以下、$m\neq0$として考えることにする。

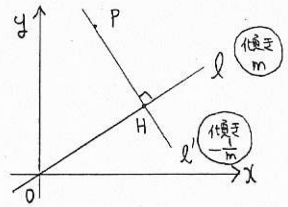
方法①　実際に垂線の足Hの座標を求めて、直接、PHの長さを計算する方法。

めんどうやけど単純でわかりやすい。

点$P(p, q)$を通り、直線$l: y=mx$に垂直な直線l'の方程式は、$y=-\frac{1}{m}(x-p)+q$である。

lとl'の交点をHとすると、PHの長さが、点Pと直線lの距離に等しい。

$\begin{cases} y=mx \\ y=-\frac{1}{m}(x-p)+q \end{cases}$ より



$$mx=-\frac{1}{m}(x-p)+q$$

$$m^2x=-x+p+mq$$

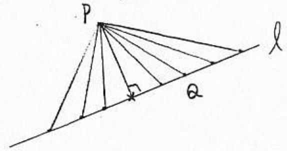
$$(1+m^2)x=p+mq\qquad\therefore\ x=\frac{p+mq}{1+m^2},\quad y=\frac{mp+m^2q}{1+m^2}$$

よって $H\left(\frac{p+mq}{1+m^2},\ \frac{mp+m^2q}{1+m^2}\right)$

$$\begin{aligned}\therefore\ PH^2&=\left(p-\frac{p+mq}{1+m^2}\right)^2+\left(q-\frac{mp+m^2q}{1+m^2}\right)^2\\&=\left(\frac{m^2p-mq}{1+m^2}\right)^2+\left(\frac{q-mp}{1+m^2}\right)^2\\&=m^2\left(\frac{mp-q}{1+m^2}\right)^2+\left(\frac{mp-q}{1+m^2}\right)^2\\&=(1+m^2)\left(\frac{mp-q}{1+m^2}\right)^2\\&=\frac{(mp-q)^2}{1+m^2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ PH=\frac{|mp-q|}{\sqrt{1+m^2}}\ //$$

方法②　直線l上の任意の点をQとし、PQの長さの最小値を計算する方法。



$l: y=mx$上の任意の点を$Q(t, mt)$とおく。このとき、

$$\begin{aligned}PQ^2&=(p-t)^2+(q-mt)^2\\&=p^2-2pt+t^2+q^2-2mqt+m^2t^2\\&=(1+m^2)t^2-2(p+mq)t+p^2+q^2\quad\cdots①\end{aligned}$$

よって、tについての2次関数①の最小値を考えればよい。

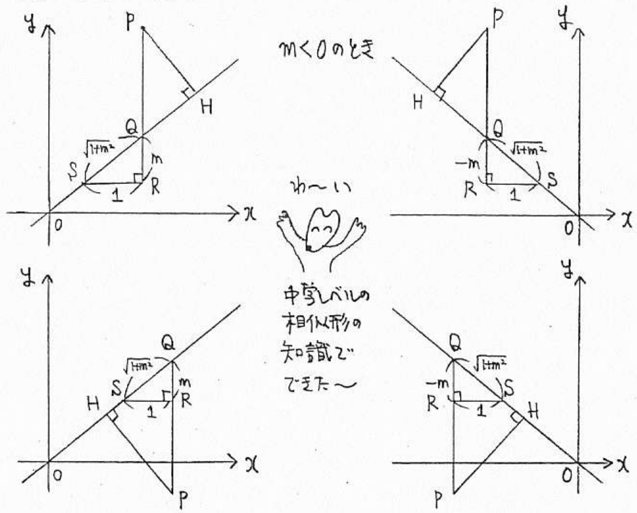
$$\begin{aligned}PQ^2&=(1+m^2)\left(t^2-\frac{2(p+mq)}{1+m^2}t\right)+p^2+q^2\\&=(1+m^2)\left\{\left(t-\frac{p+mq}{1+m^2}\right)^2-\left(\frac{p+mq}{1+m^2}\right)^2\right\}+p^2+q^2\\&=(1+m^2)\left(t-\frac{p+mq}{1+m^2}\right)^2-\frac{(p+mq)^2}{1+m^2}+p^2+q^2\\&=(1+m^2)\left(t-\frac{p+mq}{1+m^2}\right)^2+\frac{-(p+mq)^2+(p^2+q^2)(1+m^2)}{1+m^2}\\&=(1+m^2)\left(t-\frac{p+mq}{1+m^2}\right)^2+\frac{m^2p^2-2mpq+q^2}{1+m^2}\\&=(1+m^2)\left(t-\frac{p+mq}{1+m^2}\right)^2+\frac{(mp-q)^2}{1+m^2}\end{aligned}$$

平方完成が大変や〜

よって、PQ^2は $t=\frac{p+mq}{1+m^2}$のとき 最小値$\frac{(mp-q)^2}{1+m^2}$ となる。

よって PQの最小値は $\frac{|mp-q|}{\sqrt{1+m^2}}$ であり これが点Pと直線lとの距離である。//

方法③ 3角形の相似の利用

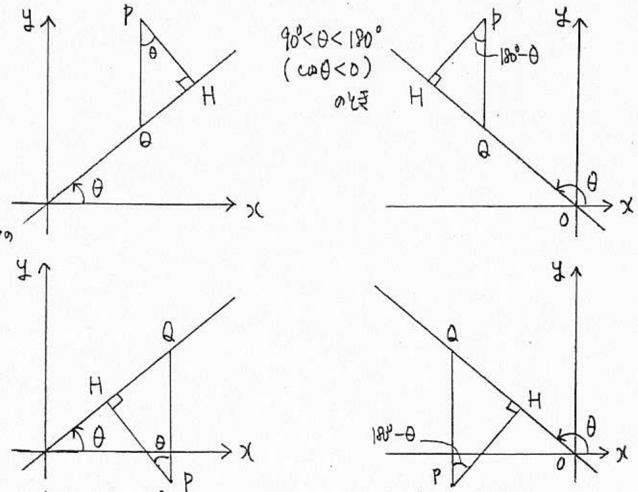


いずれの場合も、△PQH∽△SQR. P(p, q), Q(p, mp) より $PQ=|mp-q|$

∴ $PH : SR = PQ : SQ$

$PH : 1 = |mp-q| : \sqrt{1+m^2}$　∴ $PH=\dfrac{|mp-q|}{\sqrt{1+m^2}}$ //

方法④ 傾き$m=\tan\theta$（θはlとx軸の正の方向とのなす角）を利用する方法.



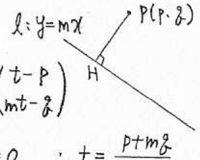
$\dfrac{|mp-q|}{\sqrt{1+m^2}}$ の中の $\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ が $|\cos\theta|$ のことだったなんて!! おどろいた〜

$PH = PQ\cos\theta$　　$PH = PQ\cos(180^\circ-\theta) = -PQ\cos\theta$

∴ $PH = PQ|\cos\theta|$

$m=\tan\theta$ より, $1+m^2=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　よって $|\cos\theta|=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$　∴ $PH=\dfrac{|mp-q|}{\sqrt{1+m^2}}$ //

方法⑤ ベクトルの利用（内積）



点Hはl上の点なので H(t, mt) とおく。このとき $\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}t-p\\ mt-q\end{pmatrix}$

"$\overrightarrow{PH}\perp l$の方向ベクトル"なので $\overrightarrow{PH}\cdot\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}=0$, よって $1\cdot(t-p)+m(mt-q)=0$　∴ $t=\dfrac{p+mq}{1+m^2}$

従って 点Hの座標は $H\left(\dfrac{p+mq}{1+m^2}, \dfrac{mp+m^2q}{1+m^2}\right)$. … 以下 方法① と同じなので省略 //

方法⑥ ベクトルの利用（法線ベクトル）

これが直線lの法線ベクトルです。

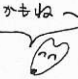
lの方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$ に垂直なベクトルの1つは $\begin{pmatrix}m\\ -1\end{pmatrix}$ なので $\overrightarrow{PH}=k\begin{pmatrix}m\\ -1\end{pmatrix}$ とおける。

このとき $|\overrightarrow{PH}|=|k|\sqrt{1+m^2}$. また $\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP}=k\begin{pmatrix}m\\ -1\end{pmatrix}$ より $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+k\begin{pmatrix}m\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+km\\ q-k\end{pmatrix}$

点Hはl上にあるので $q-k=m(p+km)$　∴ $k=\dfrac{q-mp}{1+m^2}$

∴ $|\overrightarrow{PH}|=|k|\sqrt{1+m^2}=\left|\dfrac{q-mp}{1+m^2}\right|\times\sqrt{1+m^2}=\dfrac{|mp-q|}{\sqrt{1+m^2}}$ //

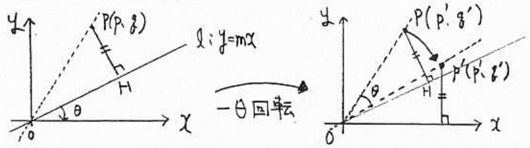
この方法が一番簡単かもね〜



方法⑦ 1次変換（回転）の利用 … 理系向き

点P(p, q)を原点のまわりに −θ回転した点をP'(p', q')とすると, $|PH|=|q'|$.

（lがx軸に重なります!!）

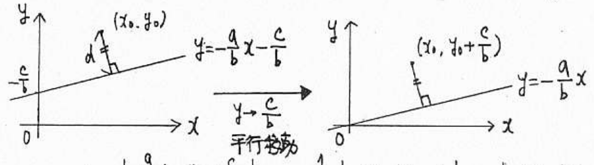


∴ $\begin{pmatrix}p'\\ q'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\cos\theta+q\sin\theta\\ -p\sin\theta+q\cos\theta\end{pmatrix}$

$|q'|=|-p\sin\theta+q\cos\theta|=|\cos\theta||q-p\tan\theta|=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}|q-pm|=\dfrac{|mp-q|}{\sqrt{1+m^2}}$ //　方法④ も参照のこと。

以上により, $y=mx$の場合の証明が完了したので、次に一般形 $ax+by+c=0$ の場合に拡張しよう。

まず $b\neq0$のとき, $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ なので, y軸方向に $\dfrac{c}{b}$ 平行移動して考えると



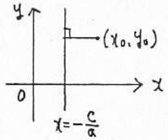
（$y=mx$の場合の公式で $m=-\dfrac{a}{b}$, $p=x_0$, $q=y_0+\dfrac{c}{b}$ と置きかえればよい）

∴ $d=\dfrac{\left|-\frac{a}{b}x_0-y_0-\frac{c}{b}\right|}{\sqrt{1+\left(-\frac{a}{b}\right)^2}}=\dfrac{\frac{1}{|b|}|-ax_0-by_0-c|}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}}=\dfrac{|-ax_0-by_0-c|}{|b|\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}}=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ …(☆)

次に $b=0$のとき, $x=-\dfrac{c}{a}$ なので

点(x_0, y_0)との距離は $\left|x_0+\dfrac{c}{a}\right|=\dfrac{|ax_0+c|}{|a|}$

これは(☆)において$b=0$としたものに一致する。



よって 点(x_0, y_0)と直線 $ax+by+c=0$ の距離dは, $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。//