直線の通過領域

入試でよく出る
とっても大切なテーマ

直線や曲線が通過したときにできる領域 (これを通過領域といいます) を図示する問題は，大学入試でもとても重要な問題で，3 通りの解法があります．いずれも大切な考え方なのでしっかりと理解してください．

例 題 1.　a が実数全体を変化するとき，直線 $y=2(a+1)x-a^2+1$ の通過領域を図示せよ．

どうするのかなぁ？
うーん

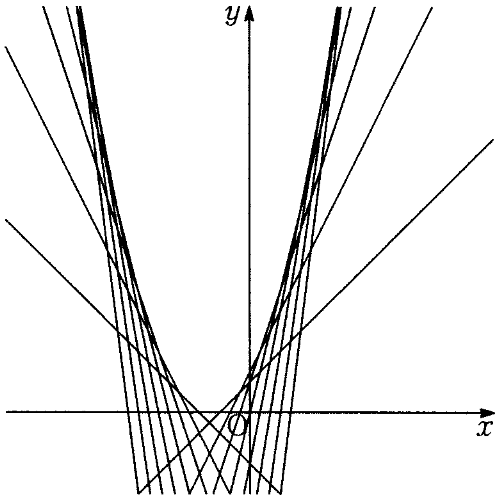
実数 a の値がいろいろ変化したときの直線の様子を調べるのですから，とりあえず $-5 \leqq a \leqq 3$ の範囲で 0.5 刻みで直線の式を求めてみました．

とりあえず
具体的に
書き出してみたのね…
フムフム

a	$y=2(a+1)x-a^2+1$
-5	$y=-8x-24$
-4.5	$y=-7x-19.25$
-4	$y=-6x-15$
-3.5	$y=-5x-11.25$
-3	$y=-4x-8$
-2.5	$y=-3x-5.25$
-2	$y=-2x-3$
-1.5	$y=-x-1.25$
-1	$y=0$
-0.5	$y=x+0.75$
0	$y=2x+1$
0.5	$y=3x+0.75$
1	$y=4x$
1.5	$y=5x-1.75$
2	$y=6x-3$
2.5	$y=7x-5.25$
3	$y=8x-8$

これじゃ
サッパリ
わからん

これらの直線を全てパソコンで図示してみると右上図のようになります．なんとなく通過領域が見えてきませんか？



なんか
美しいぞ〜
オ〜ッ
スゲ〜

a の値をもっと小刻みに大量に当てはめて図示すると，おそらく下図のようになると予想できます．どうやら境界線は放物線 (2 次関数) になっているようです．

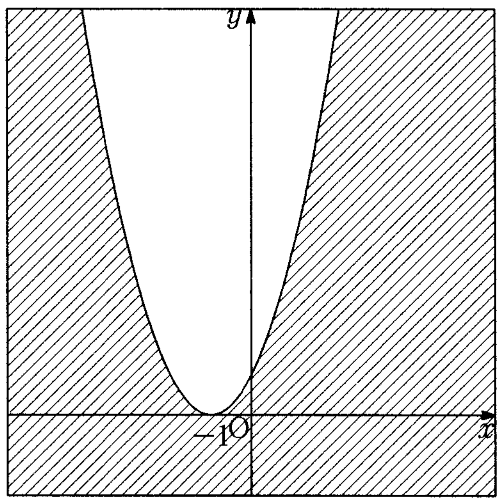


図 1

そうやなあ
何となく
こんな感じに
なりそう…
できた〜

しかしながら，これでは単なる予想に過ぎないので，きちんと理屈と計算で導く必要があります．

テストに
パソコンは
持ち込めないからね
ガーン

1　パラメータの実数条件を考える

そもそも領域とは「ある条件を満たす点の集まり」にすぎません．直線の通過領域を考える場合，「ある点 P(X，Y) が領域内に含まれる」とはどのような状態を表現しているのでしょうか．

そんなん考えたことないよ

次のように考えるとよいでしょう．

▷Point◁

点 P(X，Y) が通過領域に含まれる	⟷	点 P(X，Y) が通過領域に含まれない
⇕		⇕
点 P(X，Y) を通る直線が存在する	⟷	点 P(X，Y) を通る直線が存在しない
⇕		⇕
実数 a が存在する	⟷	実数 a が存在しない

フムフム

つまり，点 P(X，Y) が通過領域に含まれるかどうかは実数 a が存在するかどうかで決まるわけです．

具体例で確認してみよう．

> 【例】　次のことを計算で確認せよ．
> (1)　点 (0，0) は通過領域に含まれるか．
> (2)　点 (−1，1) は通過領域に含まれるか．

$\boxed{\text{考え方}}$ 先ほどの図 1 を見れば，点 (0，0) は通過領域に含まれ，点 (−1，1) は通過領域に含まれていないことがわかりますが，これを計算で確認しようというわけです．

解　(1)　$y = 2(a+1)x - a^2 + 1$ に $(x,\ y) = (0,\ 0)$ を代入すると，$-a^2 + 1 = 0$ つまり $a^2 = 1$ となり，$a = \pm 1$ と実数 a が定まる．このことから，点 (0，0) は $a = \pm 1$ の場合の直線上に存在することになる．

よって，点 (0，0) は通過領域に含まれている．

(2)　$y = 2(a+1)x - a^2 + 1$ に $(x,\ y) = (-1,\ 1)$ を代入すると，$1 = -2(a+1) - a^2 + 1$ つまり $a^2 + 2a + 2 = 0$ となり，判別式 $D < 0$ より実数 a は存在しない．このことから，点 (−1，1) を通る直線は存在しないことになる．

よって，点 (−1，1) が通過領域に含まれていない．

ナルホドー

具体例で考えるとわかりやすいね

■

以上の考察から，次のことが分かります．

> 直線 $y = 2(a+1)x - a^2 + 1$ の通過領域とは，$y = 2(a+1)x - a^2 + 1$ を満たすような実数 a が存在するような点 $(x,\ y)$ を寄せ集めたものである．

従って，直線の式 $y = 2(a+1)x - a^2 + 1$ を a を主体に考えるので，a で整理すると，

$$y = 2(a+1)x - a^2 + 1$$
$$\Longleftrightarrow a^2 - 2ax + y - 2x - 1 = 0$$

つまり，a についての 2 次方程式

$$a^2 - 2ax + y - 2x - 1 = 0 \cdots\cdots (※)$$

の実数解について考えることになるのです．

よって，a が全ての実数を動くので，a の 2 次方程式 (※) がとにかく実数解をもてばよいのです．

ナットク!! そういうことやったんかー

解　$y = 2(a+1)x - a^2 + 1$ より，

$a^2 - 2xa + y - 2x - 1 = 0$ ……①

a についての 2 次方程式 ① が実数解をもつような $(x,\ y)$ の集まりが求める通過領域になるので，判別式を D とすると，$D \geqq 0$．よって，$(-x)^2 - (y - 2x - 1) \geqq 0$ より $y \leqq x^2 + 2x + 1$

したがって求める通過領域は図 1 のようになる．

■

2　包絡線の考え方

媒介変数 (パラメータ) の変化にともない，直線群がある曲線に接しながら移動するとき，この曲線を「包絡線 (ほうらくせん)」といいます．

注　なお，包絡線の一般的な定義はムズイので省略します．

今回の場合，最初のパソコンによる図 1 を見ると，直線群 $y = 2(a+1)x - a^2 + 1$ は，放物線 $y = (x+1)^2$ に接しながら動いています．つまり，直線群 $y = 2(a+1)x - a^2 + 1$ の包絡線が $y = (x+1)^2$ です．

もし，この包絡線である放物線を最初に求めることができたら，直線の通過領域がイメージしやすくなるでしょう．どうやって求めるのでしょうか．

$\boxed{\text{包絡線の求め方}}$

$y = 2(a+1)x - a^2 + 1$ … ① を，a の 2 次式と見て平方完成すると，

$(a-x)^2 - x^2 + y - 2x - 1 = 0$

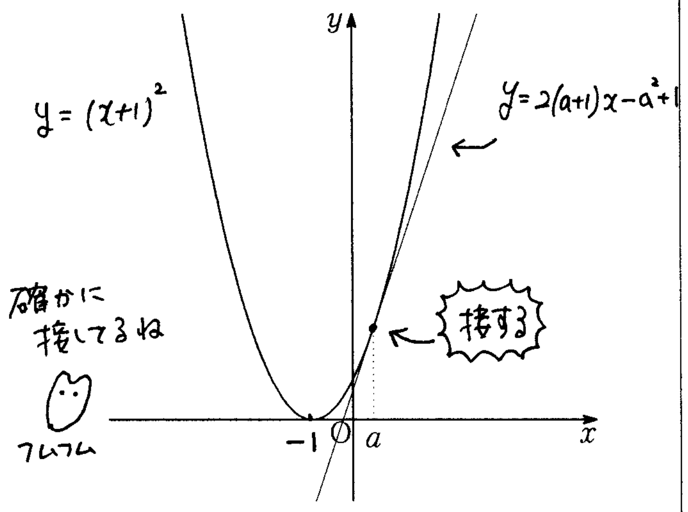
$(a-x)^2 = x^2 + 2x + 1 - y$ …①′

ここで，放物線 $y = x^2 + 2x + 1$ … ② を考えます．

①′ と ② を連立すると

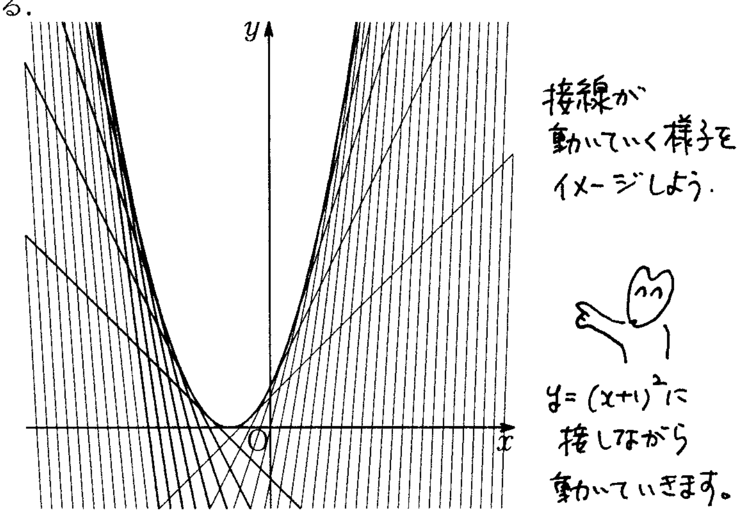
$$(a-x)^2 = 0 \qquad \therefore x = a(\text{重解})$$

したがって，①($\Longleftrightarrow$ ①′) と ② は，$x = a$ で接していることがわかります (下図).



つまり，a を変化させることは，接点を変化させることだから，接線を動かすことで直線の通過領域を直接的に求めることができるのです．

解　(先ほどの $\boxed{\text{包絡線の求め方}}$ をそのまま使って) 直線 $y = 2(a+1)x - a^2 + 1$ が放物線 $y = x^2 + 2x + 1$ に接しながら動くので，a が全ての実数を動くとき，接線の動きをイメージする下図のようになるので，求める通過領域は前出の図 1 である．



■

このように，直線がある曲線に接しながら変化していることを示せば，直線の通過領域を簡単に求めることができます．

注　念のため，$y = x^2 + 2x + 1$ の $x = a$ における接線の方程式を求めてみよう．$y' = 2x + 2$ より，

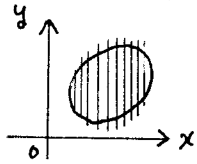
$$y - (a^2 + 2a + 1) = (2a+2)(x-a)$$

この式を整理すると，$y = 2(a+1)x - a^2 + 1$ となり，確かに $y = 2(a+1)x - a^2 + 1$ が放物線 $y = x^2 + 2x + 1$ と $x = a$ で接していることがわかります．つまり，直線 $y = 2(a+1)x - a^2 + 1$ とは単なる接線の方程式だったわけです．

これまで,「与えられた関数から接線を求める」ことばかりやってきましたが，今回は言わば,「接線を教えるからもとの関数を求めてくれ」と言っているわけです．そう考えると，この包絡線を利用した解答のイメージがつかめるのではないでしょうか．

3　1 文字固定法

別名"FAXの原理"です。切り口の様子から全体像を把握します。

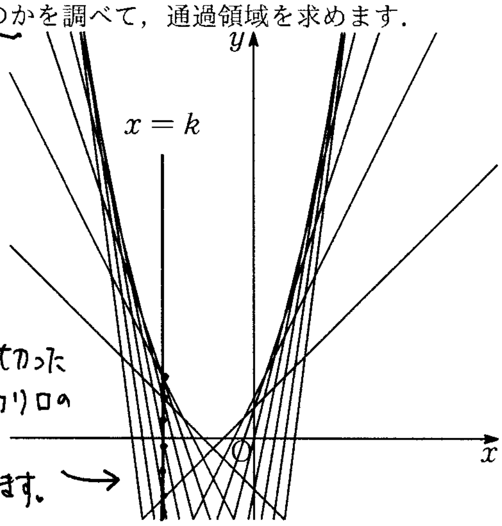


$x=k$で切ったときのyの値の範囲がわかれば，もとの図形が復元できる，というわけです。

フムフム

この方法は，$y=2(a+1)x-a^2+1$ において $x=k$ と固定したとき，a の値の変化によって y の値がどのように変化するのかを考えるものです．

言い換えれば，直線 $y=2(a+1)x-a^2+1$ と直線 $x=k$ の交点 $(k,\ 2(a+1)k-a^2+1)$ の y 座標が，a の値の変化によって，どの範囲を動きうるのかを調べて，通過領域を求めます．



$x=k$で切ったときの切り口の様子を調べます。

解　$y=2(a+1)x-a^2+1$ において $x=k$ と固定すると，$y=2(a+1)k-a^2+1$．ここで a を変化させるので y を a についての 2 次関数と考えて取り得る値の範囲を調べる．すなわち，

$$\begin{aligned} y &= 2(a+1)k-a^2+1 \\ &= -a^2+2ka+2k+1 \\ &= -(a-k)^2+k^2+2k+1 \end{aligned}$$

a がすべての実数を変化するとき，

$$y \leqq k^2+2k+1$$

よって，この式に $k=x$ を代入すると，

$$y \leqq x^2+2x+1$$

となり，これが求める通過領域になる．(図は前出の図 1 を参照のこと)

■

以上，3 通りの方法を紹介しましたが，学習の初期段階においては，勉強のために最初の解法「パラメータの実数条件を考える」をおススメします．「包絡線の活用」や「1 文字固定法」は通過領域の問題に十分慣れ親しんでからにしましょう．下手にかっこつけて使うと痛い目に会いますよ．

まずは実数条件をマスターします。

はーい

4　入試問題紹介

入試問題となるとパラメータに条件がつく場合がほとんどですが，根本的な考え方は同じです．

> **例題 2.**　実数 t に対して xy 平面上の直線 $y=2tx-t^2$ を考える．
> (1)　t が全ての実数を動くとき，この直線が通る点 $(x,\ y)$ の全体を図示せよ．
> (2)　t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき，この直線が通る点 $(x,\ y)$ の全体を図示せよ．
> (2006 年　神戸大　文系　※(2) のみ)

(1)は さっきと全く同じやな。(2)は…？

？？

tに条件がついてるゾ

考え方　(1) のように t が全ての実数を動く場合は，先ほどと同様に，$y=2tx-t^2$ を $t^2-2xt+y=0$ と変形して，判別式 $D \geqq 0$ で一発終了です．しかし，(2) の場合は，t は全ての実数ではないので，そう単純な話ではありません．t を「$|t| \geqq 1$ の範囲内で動かしたときの直線の通過領域を求める」ということは，ようするに t の 2 次方程式が「$|t| \geqq 1$ の範囲内に実数解を少なくとも 1 個もつ」というだけのことです．

解

$$y=2tx-t^2 \iff t^2-2xt+y=0$$

$f(t)=t^2-2xt+y$ とおく．

(1)　$f(t)=0$ が実数解をもてばよいので，

$$D \geqq 0$$

よって，$x^2-y \geqq 0$．$\therefore\ y \leqq x^2$．

これは楽勝!!

求める通過領域は図の斜線部分 (ただし境界線も含む).

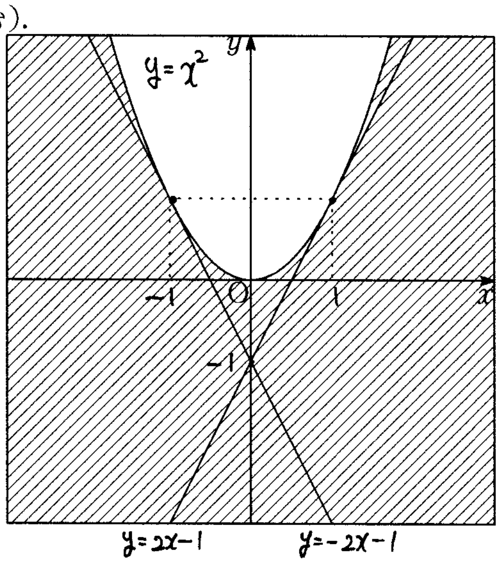


図 2　(t が全ての実数のとき)

よーく見比べよう

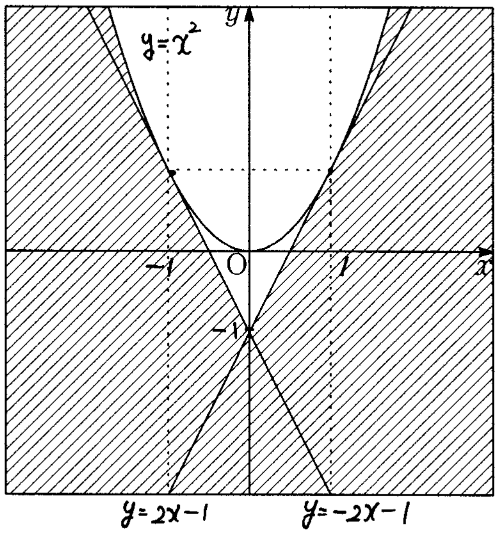


図 3　($|t| \geqq 1$ のとき)

(2) $f(t)=0$ が $|t| \geqq 1$ で少なくとも 1 つの実数解をもつ条件を考える.

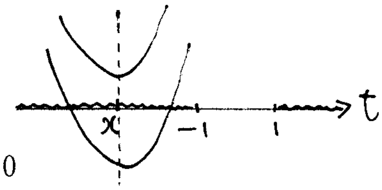
$f(t)=(t-x)^2-x^2+y$ とおく. 軸 $x=t$ の位置で場合分けする.

$f(t)=0$ の判別式を D とする.

(i) $x \leqq -1$ のとき, 右図より, 求める条件は,

少なくとも1つの実数解をもてばよいのでこれだけでOK

$D \geqq 0$

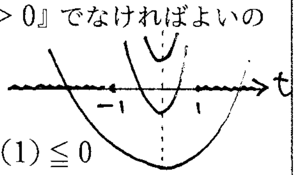


よって, $x^2-y \geqq 0$

$\therefore\ y \leqq x^2$.

(ii) $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき,

『$f(-1)>0$ かつ $f(1)>0$』でなければよいので, つまり, 求める条件は



$f(-1) \leqq 0$ または $f(1) \leqq 0$

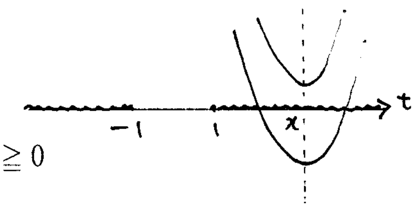
よって, $1+2x+y \leqq 0$ または $1-2x+y \leqq 0$

$\therefore\ y \leqq -2x-1$ または $y \leqq 2x-1$

(iii) $1 \leqq x$ のとき, 右図より, 求める条件は,

少なくとも1つの実数解をもてばよいのでこれだけでOK

$D \geqq 0$



よって, $x^2-y \geqq 0$

$\therefore\ y \leqq x^2$.

従って, 以上より, 直線の通過領域は図の斜線部分 (ただし境界線も含む).

注 上の 2 つの図を比較すると, 例えば, 点 $\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ は図 2 には入っていますが, 図 3 には入っていません. なぜなら, $y=2tx-t^2$ に $x=0$, $y=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると, $t^2=\dfrac{1}{2}$ より, $t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. t は実数として確かに存在しますが, $|t| \geqq 1$ ではないからです.

フムフム

参考 包絡線の考え方を用いる方法でも解いてみましょう.

別解 $y=2tx-t^2\ \cdots$ ① を, t の 2 次式と見て平方完成して,

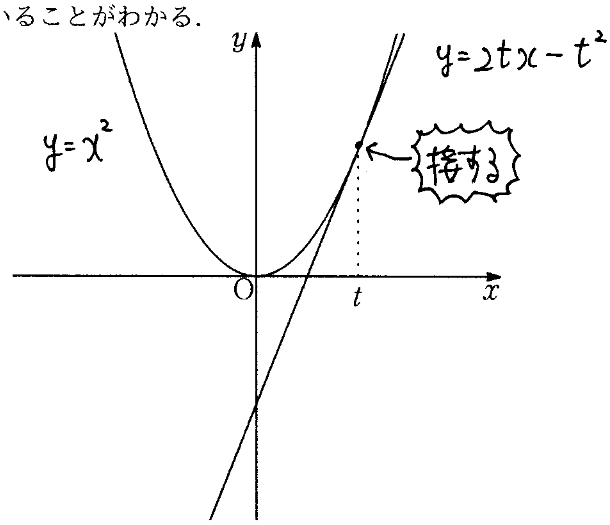
$(t-x)^2-x^2+y=0$

$(t-x)^2=x^2-y\ \cdots$ ①′

ここで, 放物線 $y=x^2\ \cdots$ ② を考える. ①′ と ② を連立すると

$$(t-x)^2=0 \qquad \therefore\ x=t\text{(重解)}$$

したがって, ①($\Longleftrightarrow$ ①′) と ② は, $x=t$ で接していることがわかる.



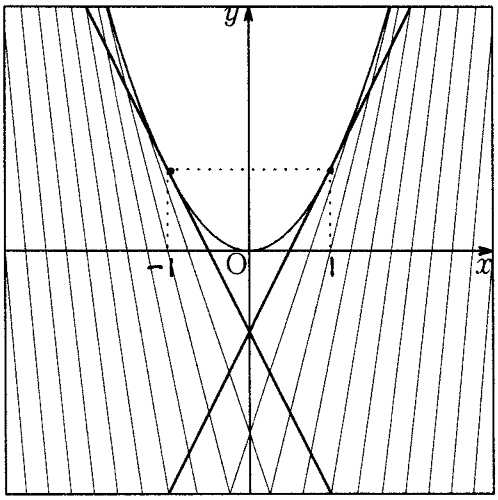
ほとんど数学Iの2次関数の問題ですね。

数学ってつみかさねやねんなあ…

ここで，t を $|t| \geqq 1$ の範囲で変化させると，直線①が放物線②に接しながら動くので，接線の動きをイメージすると，右図のようになる．

したがって，求める通過領域は図3である．

■



接線が動いていく様子をイメージしよう。

$y=x^2$ に接しながら動いていきます。

注　(2) のようにパラメータに制限がある場合には，包絡線の考え方は極めて有効であるように思われます．できれば，包絡線の解法もマスターしておきたいところ．

例題 3.　θ が実数全体を動くとき，xy 平面上の直線 $y=(\cos\theta)x+\cos 2\theta$ の通りうる範囲を図示せよ．　（1987年　横浜市大　文系）

今度は三角関数とのコラボレーション

う〜　カンベンしてほしい…

考え方　2倍角の公式を用いて変形すると，

$$y=(\cos\theta)x+\cos 2\theta=(\cos\theta)x+2\cos^2\theta-1$$

ここで，$\cos\theta=t$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ であり，

$$y=tx+2t^2-1 \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

つまり，$2t^2+xt-y-1=0 \cdots ①$

よって①が $-1 \leqq t \leqq 1$ で少なくとも1つの実数解をもつ条件を考えればよいです．

解　$\cos\theta=t$ とおく．2倍角の公式より

$$y=(\cos\theta)x+\cos 2\theta=tx+2t^2-1$$

つまり，$2t^2+xt-y-1=0$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ で少なくとも1つの実数解をもつ条件を考えればよい．

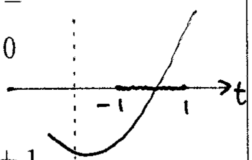
$f(t)=2t^2+xt-y-1$ とおく．

$f(t)=2\left(t+\dfrac{x}{4}\right)^2-\dfrac{x^2}{8}-y-1$ より，軸 $t=-\dfrac{x}{4}$ の位置で場合分けする．

$f(t)=0$ の判別式を D とする．

(i)　$-\dfrac{x}{4} \leqq -1$，すなわち $x \geqq 4$ のとき，

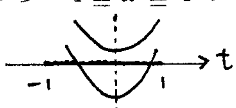
$f(-1) \leqq 0$ かつ $f(1) \geqq 0$



であればよい．つまり

$y \geqq -x+1$ かつ $y \leqq x+1$

(ii)　$-1 \leqq -\dfrac{x}{4} \leqq 1$，すなわち $-4 \leqq x \leqq 4$ のとき，



$D \geqq 0$

かつ「$f(-1) \geqq 0$ または $f(1) \geqq 0$」

-1≦t≦1で少なくとも1回交わればよいのです。
2回交わる必要はありません

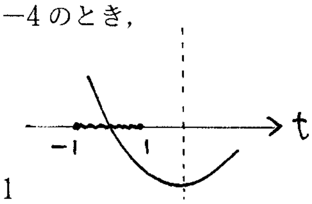
であればよい．つまり，

$y \geqq -\dfrac{1}{8}x^2-1$

かつ「$y \leqq x+1$ または $y \leqq -x+1$」

(iii)　$1 \leqq -\dfrac{x}{4}$，すなわち $x \leqq -4$ のとき，

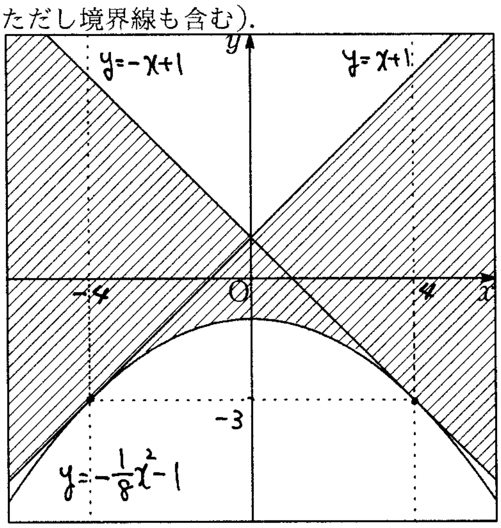
$f(-1) \geqq 0$ かつ $f(1) \leqq 0$



であればよい．つまり，

$y \geqq x+1$ かつ $y \leqq -x+1$

従って，以上より，直線の通過領域は図の斜線部分（ただし境界線も含む）．



■

注　包絡線を利用する解法は各自にオマカセします．おそらくかなり簡単にできると思います．

やってみまーす　はーい