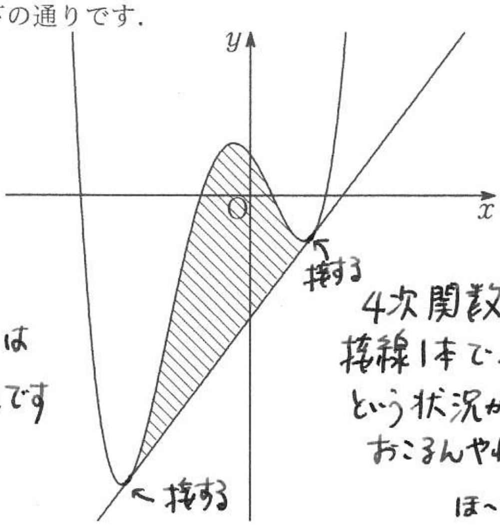
4 次関数の接線と面積

4 次関数の接線と面積に関する問題では何と言っても次の問題が有名です．

> **例題** $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ のグラフと 2 点で接する直線とで囲まれた部分の面積を求めよ．

考え方 4 次関数のグラフと直線の位置関係は以下の通りです．



こういう接し方は初めてです

4次関数は接線1本で接点2コという状況がおこるんやね

ほ〜っ

まずは，接線と接点を求めねばなりませんが，実は微分など一切不要で接線と接点が求められます（微分を用いた方法は後述）．

解

接線の方程式を $y = mx + n$，接点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおく．このとき，

$$(x^4+2x^3-3x^2-2x+1)-(mx+n) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

であるので，両辺の係数を比較する．まず右辺を展開すると，$(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)(x^2 - 2\beta x + \beta^2)$ なので，

x^3 の係数 $= -2\alpha - 2\beta$
x^2 の係数 $= \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2$
x^1 の係数 $= -2\alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta$
定数項 $= \alpha^2\beta^2$

いずれも α, βの対称式になっていることがポイントです

したがって，

$$\begin{cases} -2\alpha - 2\beta = 2 & \cdots ① \\ \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = -3 & \cdots ② \\ -2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 = -2 - m & \cdots ③ \\ \alpha^2\beta^2 = 1 - n & \cdots ④ \end{cases}$$

対称式といえば和α+βと積αβに注目するのでしたね

そうそう

② $\iff (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta = -3$

なので，① より，$\alpha + \beta = -1$ を代入して，$\alpha\beta = -2$.

③ $\iff -2\alpha\beta(\alpha + \beta) = -2 - m$

④ $\iff (\alpha\beta)^2 = 1 - n$

$\alpha + \beta = -1$，$\alpha\beta = -2$ を代入して，

$m = 2,\ n = -3$ ← 接線決定!!

まさか係数比較するとは思わんかったなー

意外とカンタン〜

また，$\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ は $t^2 + t - 2 = 0$ の 2 つの解だから，$(t+2)(t-1) = 0$ より，

$\alpha = -2,\ \beta = 1.$ ← 接点決定!!

したがって，求める面積は，

$$\int_{-2}^{1} \{(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1) - (2x - 3)\}\, dx$$
$$= \int_{-2}^{1} (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4)\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x \right]_{-2}^{1}$$
$$= \frac{1}{5}(1+32) + \frac{1}{2}(1-16) - (1+8) - 2(1-4) + 4(1+2)$$
$$= \frac{33}{5} - \frac{15}{2} - 9 + 6 + 12$$
$$= \frac{66-75}{10} + 9$$
$$= \frac{-9}{10} + 9$$
$$= \frac{81}{10}$$

■

落ち着いて計算しよう。決してむつかしくないよ

自信ない…

うん

注 接線の求め方について，「展開して係数比較するなんてメンドウやなあ．微分を使ってできんのか？」と思った人のために，微分法を利用した方法も紹介しておきましょう．

まずは，$y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ の $x = \alpha$ における接線の方程式を求めます．

$y' = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 2$ より，

$$y - (\alpha^4 + 2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha + 1) = (4\alpha^3 + 6\alpha^2 - 6\alpha - 2)(x - \alpha)$$

よって，

$$y = (4\alpha^3+6\alpha^2-6\alpha-2)x - 3\alpha^4 - 4\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1$$

ここから 2 通りの方法があります．

方法① この接線の方程式ともとの 4 次関数の式を連立して因数分解をします．$x=\alpha$ で接するので $(x-\alpha)^2$ でくくりだせ，$(x-\alpha)^2\times$（2 次式）の形になるはず．となれば，（2 次式）の部分がさらに重解をもてばよいので，判別式 $=0$ とすれば，α が求まります．

方法② 同様に，$x=\beta$ における接線の方程式
$y=(4\beta^3+6\beta^2-6\beta-2)x-3\beta^4-4\beta^3+3\beta^2+1$
を求めて，これら 2 つの接線が一致することから係数を比較します．

$$\begin{cases} 4\alpha^3+6\alpha^2-6\alpha-2=4\beta^3+6\beta^2-6\beta-2 \\ -3\alpha^4-4\alpha^3+3\alpha^2+1=-3\beta^4-4\beta^3+3\beta^2+1 \end{cases}$$

この連立方程式を解けば，α と β が分かります．

これら 2 つの方法についてどう思いますか．どう考えても最初の 解 が一番簡単ですよね．微分を使う方がもっとメンドウなことになるのです．

この問題は僕自身も高校時代に悩みました．僕も最初は微分を使って，あーでもない，こーでもないといろいろ試行錯誤しましたが，結局のところ，微分を使わずに展開して係数比較する方法が結果的に一番簡単であることに気づいて「な〜んや，それだけのことか，しょーもなー」と呆れ，嘆いた思い出があります．

自分自身でしっかり考えて悩んだ問題はいつまでも覚えているものですね．

この計算はヤバい

あかんわ

参考 これまでと同様に一般的に計算してみよう．

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx \\
&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2((x-\alpha)-(\beta-\alpha))^2\,dx \\
&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)+(\beta-\alpha)^2\}\,dx \\
&=\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^4-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2\}\,dx \\
&=\left[\frac{1}{5}(x-\alpha)^5-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^4+\frac{(\beta-\alpha)^2}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta \\
&=\frac{1}{5}(\beta-\alpha)^5-\frac{\beta-\alpha}{2}(\beta-\alpha)^4+\frac{(\beta-\alpha)^2}{3}(\beta-\alpha)^3 \\
&=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)(\beta-\alpha)^5=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5
\end{aligned}$$

この変形がポイント

x−α の形をムリヤリ作り出したわけです

まともに展開するよりかは楽かなあ…

うーん

x−αの形をくずさずに展開する

下の注参照

積分区間の上端だけを考えることになる

（x=αを代入すると"0"だから）

実にシンプル〜

これがやりたかったのね

と一発で求まります．

検算用として覚えておくと良いでしょう．

➾注 上の計算で次の公式を利用しました．

$$\int (x+a)^n\,dx=\frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}+C$$

この公式は一般的には置換積分（数学 Ⅲ）で証明されます．

この計算結果から，右図のように 4 次関数とその接線で囲まれる部分の面積 S は 4 次関数の x^4 の係数を a とするとき，

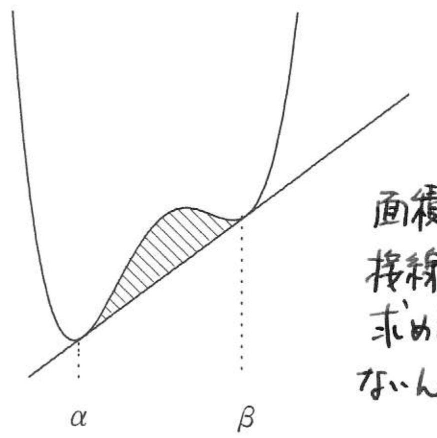
$$S=\frac{|a|}{30}(\beta-\alpha)^5$$

となります．

したがって，最初の 例 題 の場合，

$$S=\frac{1}{30}(1-(-2))^5=\frac{81}{10}$$

無理におぼえなくていいよ。ほとんど役に立たないし



そうなん？

面積よりも接線を一発で求める公式はないんかなあ…？

調べてみようよ．