そもそもビブンとは何なのか…?

『微分法』の始まり

ニュートンやライプニッツが350年も前に考え出したんです

微分法は，関数 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式を求めることから始まります．

しかしながら曲線上にただ1点のみで接する直線を引くことなど現実問題として不可能なので，我々は極限の考えを用いて接線の傾きを定義するのでした．

まず，関数 $y=f(x)$ 上に2点A，Bをとり，$\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(a+h,\ f(a+h))$ とします．

2点A，Bを通る直線を考えます．直線ABの傾きは，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \cdots ①$$

です（この直線ABの傾きを2点AB間の平均変化率とも言います）．

ここで，点Bを点Aに限りなく近づけていくと，直線ABは点Aにおける接線に限りなく近づいていきます．

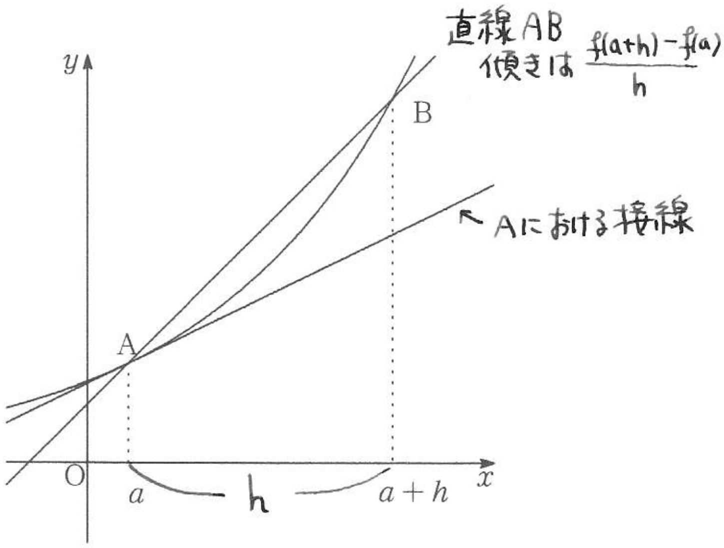
h とは点Aと点Bの x 座標の差（間隔）なので，点Bが点Aに限りなく近づくということは，h が限りなく0に近づくということです．したがって，$\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，先ほどの傾きの式①で，h を0に近づければよく，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

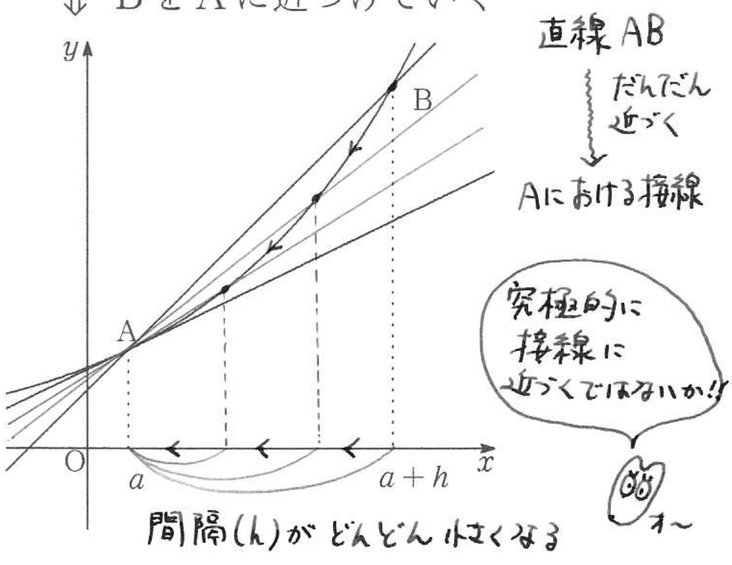
というように極限の形で表現されます．

接線を直接に求めるのは不可能なので，接線に近づけるという方法をとるのです．

この極限値を $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における微分係数とよび，$f'(a)$ で表します（または単に $x=a$ における微分係数といいます）．



⇓ BをAに近づけていく



▷Point◁（微分係数の定義）

$y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数　　$f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

微分係数 $f'(a)$ とは，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きを意味している．

⟶「定義に従って微分係数を求めよ」と言われたら，この定義に従って極限値の計算をします．

➾注

「$y=f(x)$ の $x=a$ における接線の傾きを求めよ」
「$y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数を求めよ」
「$f'(a)$ を求めよ」

という言い回しは，どれも同じ意味です．

ぜーんぶ同じやったらシンプルな言い方がエエよなあ…

なんで3通りもあるんやろ?

さて，微分係数 $f'(a)$ は a の値によって定まるので，a についての関数とみなすことができます．そこで，定数 a を関数としての変数 x でおきかえて，$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ としたものを，関数 $y=f(x)$ の導関数といいます．$f'(x)$ を単に y' とかきます．$\dfrac{dy}{dx}$ とか $\dfrac{d}{dx}f(x)$ とかくこともあります．

▷Point◁(導関数の定義・微分の定義)

> $y=f(x)$ の導関数　　$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
>
> 関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを微分するという．
>
> 厳密に言うと「微分する」の本当の意味はちょっとちがうんですが…まあいいでしょう。またそのうち教えます

はーい

⟶「定義に従って微分せよ」と言われたら，この導関数の定義に従って極限値の計算をします．

☆ とても重要な注意 ☆

逆に言うと，導関数 $f'(x)$ に $x=a$ を代入したものが，微分係数 $f'(a)$ すなわち曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きです．よく「$y=f(x)$ の接線の傾きが $f'(x)$ である」という人がいますが，これは間違いです．導関数 $f'(x)$ に $x=a$ を代入して初めて点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾き $f'(a)$ になるのです．$f'(x)$ は傾きではありません．微分係数 $f'(a)$ と導関数 $f'(x)$ をしっかりと区別しよう．

よく間違えるので注意しよう

よくみて〜

【例】　$y=f(x)=x^2+3x$ を定義に従って微分せよ．

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \leftarrow \text{これが微分の定義}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2+3(x+h)-(x^2+3x)}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{x^2+2xh+h^2+3x+3h-x^2-3x}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2+3h}{h}\\
&=\lim_{h\to0}(2x+h+3)\\
&=2x+3
\end{aligned}
$$

分母分子をhでわる

h→0 つまりhに0を代入

ここのxに1を代入するとたしかに5になっています

【例】　$y=f(x)=x^2+3x$ のとき，定義に従って微分係数 $f'(1)$ を求めよ．

$$
\begin{aligned}
f'(1)&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \leftarrow \text{これが微分係数の定義}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^2+3(1+h)-(1^2+3\cdot1)}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{1+2h+h^2+3+3h-1-3}{h}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{h^2+5h}{h}\\
&=\lim_{h\to0}(h+5)\\
&=5
\end{aligned}
$$

分母分子をhでわる

h→0．つまりhに0を代入

『微分』の計算方法

先ほどのように「定義に従って …」と指示されたら，極限値計算をせねばなりませんが，一般的には，次の公式，ルールに従って計算するのが普通です．なぜ，このような公式，ルールが成立するのかは教科書に書いてあるので各自で見ておいてください．

はーい．見ませーん

▷Point◁(微分の公式)

> $(x^3)'=3x^2$,　　$(x^2)'=2x$
>
> $(x)'=1$,　　$(c)'=0$（c は定数）
>
> 一般的に，$(x^n)'=nx^{n-1}$ が成立します．

▷Point◁(微分計算のルール)

> ① 項別にそれぞれ微分する．
>
> ② 係数は残る．
>
> ③ 展開してから微分する．
>
> 数Ⅲを使うと展開しなくても微分できますよ

先ほどの【例】を公式を用いて計算してみると，

【例】　$y=f(x)=x^2+3x$ を微分せよ ⟶ 解 微分の公式より，$f'(x)=2x+3$．

【例】　$y=f(x)=x^2+3x$ のとき，微分係数 $f'(1)$ を求めよ．

⟶ 解 $f'(x)=2x+3$ より，$f'(1)=2\cdot1+3=5$．

とってもカンタン

⟶ このように，とても簡単に計算することができるので，これからは公式を使って微分していこう．

はーい