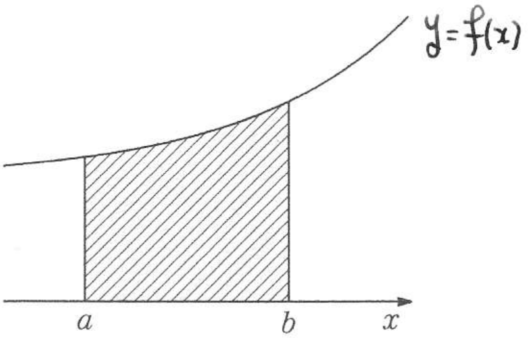
面積の原理

そもそも 面積って どーやって求めるん？



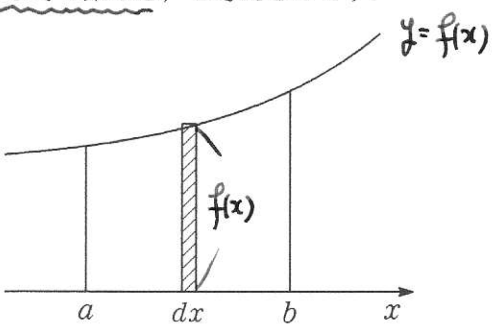
これまであまり気にせずに上図の面積を，

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

何も考えずに やってたー

という式で機械的に求めてきました．「$f(x)$ を $\int_a^b$ と dx で単純に挟んだだけ」と思うかもしれませんが，この発想だと，積分における「面積」の本質が見えてきません．この式は次のように解釈します．

斜線部の面積を求めるために，まず細かく切ってから寄せ集める，と考えるのです．



細かく切った「短冊」1枚を，縦の長さ $f(x)$，横の長さ dx の長方形と考えます，するとその面積は

$$\underset{\text{たて}}{f(x)}\times\underset{\text{よこ}}{dx}$$

この「短冊」の面積 $f(x)dx$ を a から b まで寄せ集めればよいので，

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

f(x)dx をひとまとめにして，よせ集めたんか…

となるのです．

知らんかった

➾注 積分記号の $\int$ が「和"*Sum*"」の頭文字 S からきている理由がここにあります．

ふ〜ん

面積を求める根本原理は「細かく切って寄せ集める」ということ．この考え方はとても重要なので，しっかりとイメージしておこう．

例題 $y=x^2-4$ と $y=-x^2+2x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

考え方 2つの放物線の位置関係は右ページ上図の通りです．まずは交点を求めよう．

解 2つの放物線の交点を求めると，

$x^2-4=-x^2+2x$

$2x^2-2x+4=0$

$2(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore\ x=-1,\ 2$

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x)-(x^2-4)\}\,dx\\&=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx\\&=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=9\quad\text{（計算略）}\end{aligned}$$

■

参考 この結果をもう少し検証してみよう．

$$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x)-(x^2-4)\}\,dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx$$

について．これは単なる式変形と思うかもしれませんが，式の意味を考えると左辺部は $y=-x^2+2x$ と $y=x^2-4$ で囲まれた部分の面積を，右辺部は $y=-2x^2+2x+4$ と x 軸で囲まれた部分の面積をそれぞれ表しており，これらが同じであることを意味しています．つまり，右ページの上下の図の斜線部分は，形は全く違うが面積は同じだというのです．ちょっと不思議な気がしませんか？

言われてみれば…

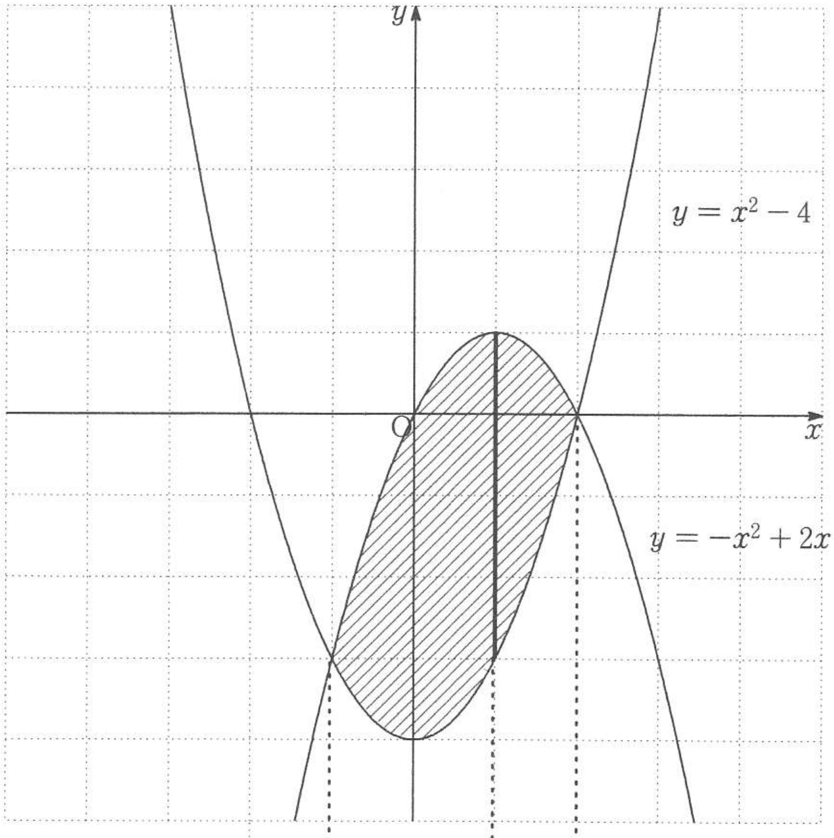
たしかに 不思議…

では，計算せずに、2つの面積が同じであることを確かめることはできないでしょうか？最初に述べた「面積は細かく切って寄せ集める」という発想がヒントなんですが・・・

やってみよう 上下の斜線部分で x 座標が同じところの長さを測って比べてみよう．定規を当ててみてください，何か気づくことはないかな？

？？？

$y=x^2-4$ と
$y=-x^2+2x$ とで
囲まれた図形の
面積



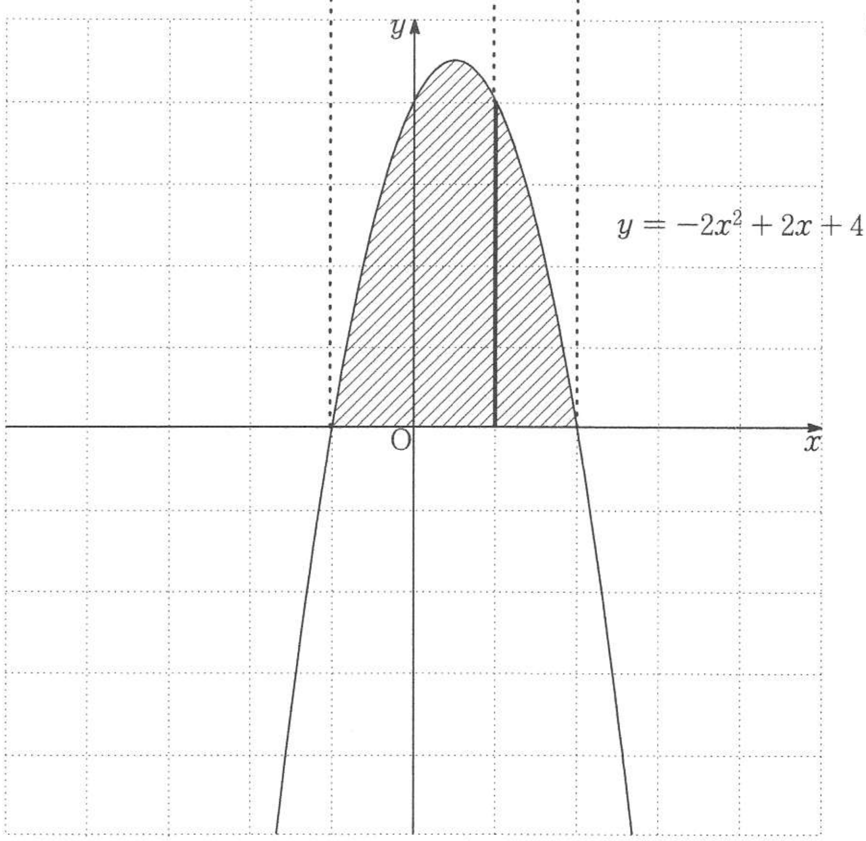
たとえば $x=1$ の
ところの長さを比べると
全く同じです
（上下図の太線部）
その他の場所でも
（たとえば $x=0$、とか
$x=1.5$ とか…）
全く長さが同じに
なっていることが
わかります。
（定規を当てて比較）

↓

つまり、見た目は
ちがう図形でも
細かく切ってみれば
全く同じだ、という
わけです。

あっ なるほど
そーゆーことか！ スッキリ

$y=-2x^2+2x+4$ と
x軸とで囲まれた
図形の面積



図形の形が
全くちがうのに
どうして面積が
同じになるのかな？
？ ？
なんで〜？

形は違っても細かく切れば同じ，つまり，上図を縦に細かく切ってそのまま下に移動していくと，下図にぴったり一致するのです．このように「細かく切って寄せ集める」という発想は積分のキホンです．

“リーマン積分”って言うんやって…
数学IIIとか大学でやるらしいよ
ふーん