放物線がらみの面積の話

放物線に関係した面積の問題は数Ⅱの積分の中心テーマです

2つの曲線（または直線）で囲まれた部分の面積 S を求める場合，次のことが基本となります．

▷Point◁

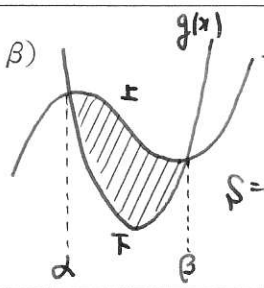
Step ①　交点の x 座標を求める（これを α, β とおく．ただし $\alpha < \beta$）

Step ②　関数の上下関係（だけ）に注目して図示し，立式する．

$$S = \int_\alpha^\beta \{(\text{上の関数}) - (\text{下の関数})\}\, dx$$

Step ③　慎重にひたすら計算する．

計算ミスいや～



$S = \int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\}\, dx$　上 － 下

上下関係をまちがえないこと

先輩!! わかりました

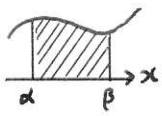
当然ながら，交点の x 座標は2つの式を連立して求めます．

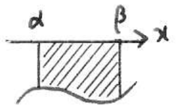
➯**注**　$f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求める場合，x 軸を $y=0$ と解釈し，上下関係に注目して，

$f(x)$ が x 軸よりも上の場合，$S = \int_\alpha^\beta \{f(x) - 0\}\, dx = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx$

$f(x)$ が x 軸よりも下の場合，$S = \int_\alpha^\beta \{0 - f(x)\}\, dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$

となります．





計算ミスが気になりますが，放物線と直線，放物線と放物線で囲まれた面積を求める場合には，次の公式が大活躍します．計算のスピード up，計算ミスの軽減になくてはならない必須の公式です．

▷Point◁（超重要公式）

とても重要な公式です

マイナスがつく

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

いちおう証明しときます．ひたすら計算するだけ．

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx \\
&= \int_\alpha^\beta \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3) - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2) + \alpha\beta(\beta-\alpha) \\
&= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2) \\
&\qquad - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta+\alpha)(\beta-\alpha) + \alpha\beta(\beta-\alpha) \\
&= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2) - 3(\alpha+\beta)^2 + 6\alpha\beta\} \\
&= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2) \\
&= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2) \\
&= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

うまく因数分解できた

ヤッホーイ

➯**注**　実はもう少し上手い方法で証明することもできますが，今は因数分解の練習だと思って，この方法でやります．上手い方法は後ほど紹介します．

こっちにマイナスつく

➯**注**　$-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

とする場合もあります．いずれにしても $-$（マイナス）が付いていることに注意しよう．まっ，どっちでも同じことですが．

また，よくやるミスとして，$-$（マイナス）を付け忘れて，

この式はマチガイやでー

大ウソ

大間違い　$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

とする間違いが後を絶ちません．注意しよう．

うん

この公式はとても便利なので，どんどん使ってほしいですが，使い方を誤ると悲劇的（0点!!）になるので注意が必要です．特に，

正しく立式してから公式を使うこと．

x^2 の係数に注意して公式を使うこと．

フムフム　なるほど…

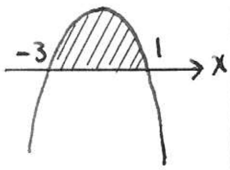
この2点が重要です．つまり，式を書かずに公式だけを使って答えを出してもダメだということ．もちろん，式を書いても，その式が間違っていて，でも公式をつかって答えだけはあっている，というのもダメです．以下に代表的な例を紹介するので，式の書き方も含めて参考にしてください．めんどくさがらずに，途中の式をきっちり書くことがポイント．

はーい

例 題 次の曲線または直線で囲まれた部分の面積を求めよ．　なお，各交点の求め方は省略します．

(1) $y=-x^2-2x+3$ と x 軸

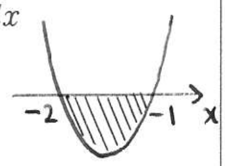
$$
\begin{aligned}
S&=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)-0\,dx\\
&=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)\,dx\\
&=-\int_{-3}^{1}(x^2+2x-3)\,dx\\
&=-\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)\,dx\\
&=\frac{1}{6}\{1-(-3)\}^3=\frac{32}{3}
\end{aligned}
$$



✎注 x 軸よりも上部の面積．x 軸を $y=0$ と解釈し，(上の関数)−(下の関数) の定義に従って立式しましたが，いきなり 2 行目の式から始めても構いません．

(3) $y=x^2+3x+2$ と x 軸

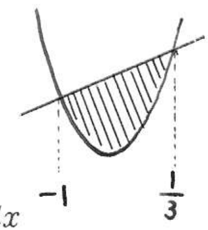
$$
\begin{aligned}
S&=\int_{-2}^{-1}0-(x^2+3x+2)\,dx\\
&=-\int_{-2}^{-1}(x^2+3x+2)\,dx\\
&=-\int_{-2}^{-1}(x+1)(x+2)\,dx\\
&=\frac{1}{6}\{-1-(-2)\}^3=\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$



✎注 x 軸よりも下部の面積．x 軸を $y=0$ と解釈し，(上の関数)−(下の関数) の定義に従って立式しましたが，いきなり 2 行目の式から始めても構いません．

(5) $y=3x^2+3x+1$ と $y=x+2$

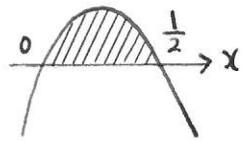
$$
\begin{aligned}
S&=\int_{-1}^{\frac{1}{3}}(x+2)-(3x^2+3x+1)\,dx\\
&=\int_{-1}^{\frac{1}{3}}(-3x^2-2x+1)\,dx\\
&=-\int_{-1}^{\frac{1}{3}}(3x^2+2x-1)\,dx\\
&=-\int_{-1}^{\frac{1}{3}}(x+1)(3x-1)\,dx\\
&=-3\int_{-1}^{\frac{1}{3}}(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)dx\\
&=3\times\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{3}-(-1)\right\}^3=\frac{32}{27}
\end{aligned}
$$



✎注 (上の関数)−(下の関数) の定義に従って立式しましたが，x^2 の係数が -3 であることに注意しよう．

(2) $y=-2x^2+x$ と x 軸

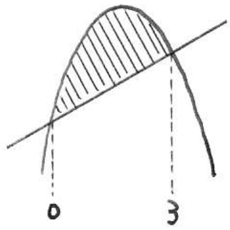
$$
\begin{aligned}
S&=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-2x^2+x)\,dx\\
&=-2\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)dx\\
&=-2\int_{0}^{\frac{1}{2}}x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx\\
&=2\times\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-0\right)^3=\frac{1}{24}
\end{aligned}
$$



✎注 (1) と同じく x 軸よりも上部の面積なので，今度はいきなり積分しました．x^2 の係数が 2 であることに注意しよう．

(4) $y=4x-x^2$ と $y=x$

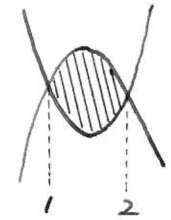
$$
\begin{aligned}
S&=\int_{0}^{3}(4x-x^2)-x\,dx\\
&=\int_{0}^{3}(-x^2+3x)\,dx\\
&=-\int_{0}^{3}(x^2-3x)\,dx\\
&=-\int_{0}^{3}x(x-3)\,dx\\
&=\frac{1}{6}(3-0)^3=\frac{9}{2}
\end{aligned}
$$



✎注 (上の関数)−(下の関数) の定義に従って立式しました．

(6) $y=x^2-4x+2$ と $y=-x^2+2x-2$

$$
\begin{aligned}
S&=\int_{1}^{2}(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\,dx\\
&=\int_{1}^{2}(-2x^2+6x-4)\,dx\\
&=-2\int_{1}^{2}(x^2-3x+2)\,dx\\
&=-2\int_{1}^{2}(x-1)(x-2)\,dx\\
&=2\times\frac{1}{6}(2-1)^3=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$



✎注 この問題で注意するのは，交点を求めるとき方程式の両辺を 2 で割ったノリで，積分の式変形の途中でも勝手に 2 で割る人が多いということ．絶対だめです．

(1)〜(6) 全て，<u>交点の x 座標と x^2 の係数だけで</u>面積が求まっていることを強く意識してください．

いきなり公式を使うのではなく，途中の計算式を必ず書こう


うん


はーい