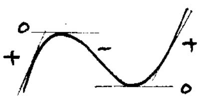
3次関数のグラフの極大と極小について

関数がいつ極大 極小になるのか考えることは、グラフの形を知る上でとても大切なことです

▷Point◁

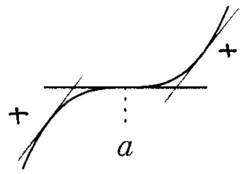
$x=a$ で極大 $\Longleftrightarrow$ $x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が $(+)\to 0\to(-)$ へと変化する.

$x=a$ で極小 $\Longleftrightarrow$ $x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が $(-)\to 0\to(+)$ へと変化する.



$f'(a)=0$ だからといって，$x=a$ で極値をとる（極大か極小になる）とは限りません.

例えば，右のような場合，$f'(a)=0$($x=a$ における接線の傾きが 0) ですが，$x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号の変化が起こってないので，$x=a$ で極大でも極小でもありません.



接線のカタムキが $+\to 0\to +$ となり、符号が変化してません

フムフム

▷Point◁

$$y=f(x) \text{ が } x=a \text{ で極値をとる} \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} f'(a)=0$$

必要十分条件じゃないということネ

まちがいやすい…

この関係はとても大切なのでしっかりと頭に入れておこう.

例題 1. $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ が $x=3$ で極小値 -26 をとるような，a，b を求めよ.

考え方 $x=3$ で極小値 -26 をとるので，計算方法としては，$f'(x)=3x^2-6x+a$ だから，

$f(3)=26$ より，$3a+b=-26$.

$f'(3)=0$ より，$9+a=0$.

これらを解けば，a，b の値は求まるのですが，これでは不十分です．先ほど述べたように，**$f'(3)=0$ だからといって，$x=3$ で極値をとるかどうかはわからないからです.**

ふ〜ん

よって，求まった a，b の場合に，本当に条件に合っているかを増減表またはグラフを書いて確認する必要があります.

解 $f'(x)=3x^2-6x+a$.

$f(3)=26$ より，$3a+b=-26$.

$f'(3)=0$ より，$9+a=0$.

したがって，$a=-9$，$b=1$.

このとき，$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ より，$x=-1$，3

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	-6	↘	-26	↗

増減表より，確かに $x=3$ で極小値 -26 をとる.

なーんだ

これだけのことか…

■

例題 2. $y=x(x-a)^2$ の極値を調べよ.

考え方 「極値を調べよ」なので，a がどういう場合に，どのような極値が存在するのかを調べる必要があります．グラフをイメージしながら考えよう.

解 $y=x(x^2-2ax+a^2)=x^3-2ax^2+a^2x$

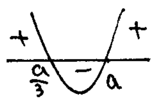
$y'=3x^2-4ax+a^2=(3x-a)(x-a)$

$y'=0$ とすると，$x=\dfrac{a}{3}$，a.

$\dfrac{a}{3}$ と a の大小がポイントとなります

(i) $\dfrac{a}{3}<a$，つまり $a>0$ のとき，

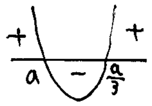
x	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$\dfrac{4}{27}a^2$	↘	0	↗



よって，$x=\dfrac{a}{3}$ のとき極大，$x=a$ のとき極小.

(ii) $\dfrac{a}{3} > a$, つまり $a < 0$ のとき,

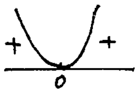
x	$\cdots$	a	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	0	↘	$\dfrac{4}{27}a^2$	↗



よって, $x = a$ のとき極大, $x = \dfrac{a}{3}$ のとき極小.

(iii) $\dfrac{a}{3} = a$, つまり $a = 0$ のとき,

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	↗	0	↗



よって, 極値を持たない.

■

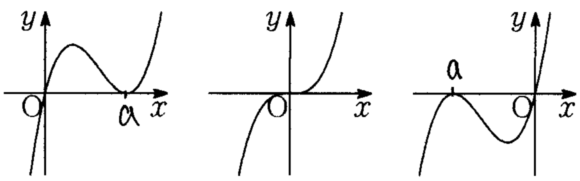
参考 $y = x(x-a)^2$ のグラフの概形は, 微分などしなくても式の形を見ただけで分かります.

$y = 0$ とすると, $x = 0$, a(重解) なので, $y = x(x-a)^2$ のグラフは x 軸と $x = 0$ で交わり, $x = a$ で接しているのです.

よって, グラフの概形は,

$a > 0$ のとき　$a = 0$ のとき　$a < 0$ のとき

たしかに
フムフム



となるので, どこで極大になるのか, 極小になるのかも簡単に分かります.

もちろん正確にかくなら微分して極値を調べる必要がありますが, 概形でよければこれで十分です.

このイメージがあるととても便利です.

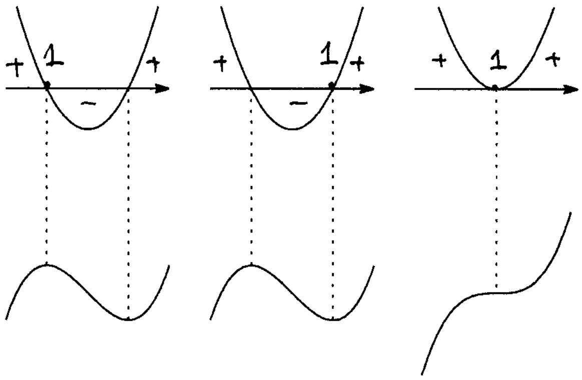
例題 3. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $x = 1$ で極大となる条件を求めよ.

考え方 質問の多い問題です. 3 次関数の極大値に関する問題ですが, ほとんど数学 I の 2 次関数の問題です.

まず当然ながら, $f'(1) = 0$ だけではダメです. $f'(1) = 0$ だからといって, $f(x)$ が $x = 1$ で極大となるかどうか (極値かどうかすら) わかりません. $f'(1) = 0$ とは「$f'(x) = 0$ が $x = 1$ を解にもっている」ということを意味しているだけです.

$f'(1) = 0$ という条件だけだと, 次の 3 パターンが考えられます (x^3 の係数 > 0 に注意). この中で, $x = 1$ で極大となる場合はどれでしょうか.

$y' = f'(x)$ の様子



x=1で極大となるのはどの場合かな?
見つけた!!

$f(x)$ が $x = 1$ で極大となるための条件は, $x = 1$ の前後で $f'(x)$ の符号が $(+) \to 0 \to (-)$ へと変化することなので, 2 次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの解をもち, そのうちの小さい方が $x = 1$ でなければなりません.

2 次方程式の解の大小を表現するには何に注目すればよいのでしょうか.

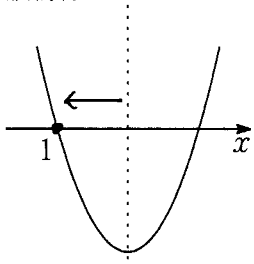
???
大小?

解 $f(x)$ が $x = 1$ で極大となるための条件は, $x = 1$ の前後で $f'(x)$ の符号が $(+) \to 0 \to (-)$ へと変化することである.

つまり, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ なので, 2 次方程式 $3x^2 + 2ax + b = 0$ が異なる 2 つの解をもち, そのうちの小さい方が $x = 1$ となる条件が求める条件である.

2 次関数 $y = 3x^2 + 2ax + b$ は軸が $x = -\dfrac{a}{3}$ の放物線である.

軸に注目!!



$x = -\dfrac{a}{3}$

2つの解の小さい方がx=1ということは つまり x=1が軸の左側にあれば良いわけです

ナルホド

よって, 求める条件は

$$\begin{cases} D > 0 & \cdots① \\ 3 + 2a + b = 0 & \cdots② \\ 1 < -\dfrac{a}{3} & \cdots③ \end{cases}$$

② ← f'(1)=0より
③ ← 1<軸より

■

参考 実は ① の $D > 0$ の条件は不要です (あっても間違いにはなりません). つまり条件 ② と ③ だけで構いません. 理由は 2 次関数のグラフの性質から明らかでしょう.

そうかそうか