シャーペンのしん，
つまようじを用意して
自分で考えよう

最大値と最小値について

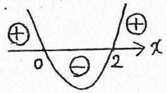
グラフの増減の
ようすを正確に
とらえよう。

微分の問題の中で最大のヤマ場です．グラフを正確に書いて，自分でシュミレーションすることが大切です．

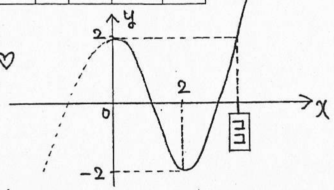
【例】 $a>0$ とする．$f(x)=x^3-3x^2+2\ (0\leqq x\leqq a)$ の最大値と最小値を求めよ．(初級編)

考え方 グラフが固定，範囲が変動するタイプ．
まずはグラフを正確に書こう．
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ だから，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	2	↘	−2	↗



グラフは
楽勝♡



$0\leqq x\leqq a$ なので，グラフの右半分に注目します．グラフ中の $\boxed{ココ}$ の値が必要になるので，自分で求めておこう．なぜ必要なのかは自分で考えよう．

なんで～

⇒注 $\boxed{ココ}$ の求め方
$x^3-3x^2+2=2$ より，$x^3-3x^2=0$
よって，$x^2(x-3)=0$ $\therefore x=0$(重解)，3
よって，$\boxed{ココ}$ は $x=3$．

解

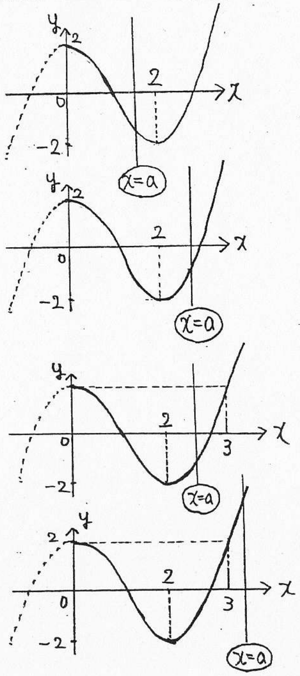
最小値について
(i) $a\leqq 2$ のとき
$x=a$ のとき最小値
$f(a)=a^3-3a^2+2$.

(ii) $2\leqq a$ のとき
$x=2$ のとき最小値
$f(2)=-2$.

最大値について
(i) $a<3$ のとき
$x=0$ のとき最大値
$f(0)=2$.

(ii) $a=3$ のとき
$x=0$，3 のとき最大値
$f(0)=f(3)=2$.

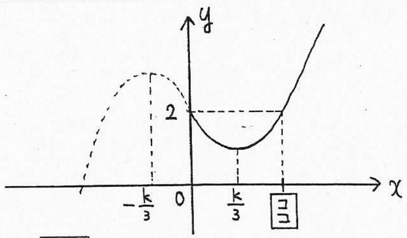
(iii) $3<a$ のとき
$x=a$ のとき最大値
$f(a)=a^3-3a^2+2$.



【例】 $k>0$ とする．$f(x)=3x^3-k^2x+2\ (0\leqq x\leqq 1)$ の最大値と最小値を求めよ．(中級編)

考え方 範囲が固定，グラフが変動するタイプ．
まずはグラフの形を決定しよう．3次関数 $f(x)$ のグラフの形は2次関数 $f'(x)=0$ の判別式によって分類されるのでした．本問の場合，$f'(x)=9x^2-k^2$ より，判別式 $D=36k^2$．問題文より $k>0$ なので $D>0$ です．よってグラフの形は一通りに決定します．

$f'(x)=(3x+k)(3x-k)$ だから，$f'(x)=0$ より，$x=\pm\frac{k}{3}$．よってグラフは右図の通り（増減表は省略）．$0\leqq x\leqq 1$ なので，グラフの右半分に注目します．グラフ中の $\boxed{ココ}$ の値が必要になるので，自分で求めておこう．なぜ必要なのかは自分で考えよう．



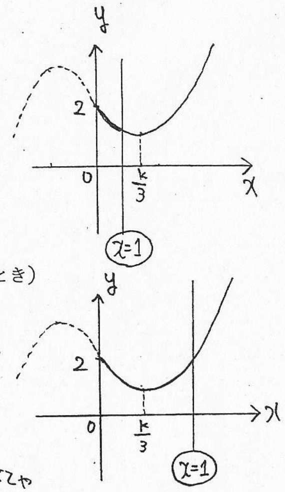
⇒注 $\boxed{ココ}$ の求め方
$3x^3-k^2x+2=2$ より，$3x^3-k^2x=0$
よって，$x(3x^2-k^2)=0$ $\therefore x=0,\ \pm\frac{k}{\sqrt{3}}$
よって，$\boxed{ココ}$ は $x=\frac{k}{\sqrt{3}}$.

なんとなく
わかる気がする～

解

最小値について
(i) $1\leqq\frac{k}{3}$ のとき
（つまり $k\geqq 3$ のとき）
$x=1$ のとき最小値
$f(1)=-k^2+5$.

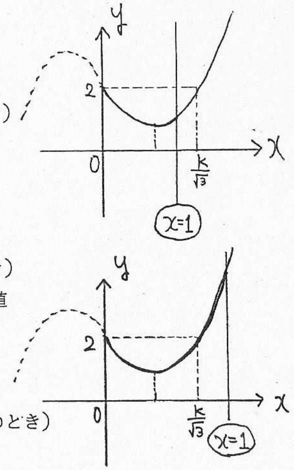
(ii) $\frac{k}{3}\leqq 1$ のとき
（つまり $0<k\leqq 3$ のとき）
$x=\frac{k}{3}$ のとき最小値
$f\left(\frac{k}{3}\right)=-\frac{2}{9}k^3+2$.



最大値について
(i) $1<\frac{k}{\sqrt{3}}$ のとき
（つまり $\sqrt{3}<k$ のとき）
$x=0$ のとき最大値
$f(0)=2$.

(ii) $\frac{k}{\sqrt{3}}=1$ のとき
（つまり $k=\sqrt{3}$ のとき）
$x=0$，1 のとき最大値
$f(0)=f(1)=2$.

(iii) $\frac{k}{\sqrt{3}}<1$ のとき
（つまり $0<k<\sqrt{3}$ のとき）
$x=1$ のとき最大値
$f(1)=-k^2+5$.

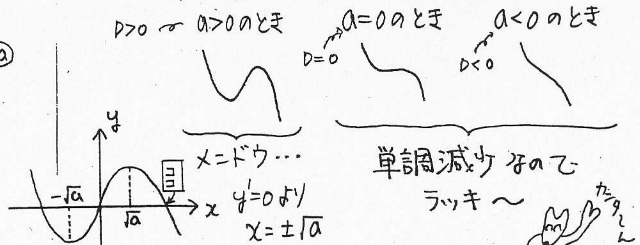


解答を見るよりも
やっぱり自分で
やってみて考えよう。

グラフがすべてや

【例】 $f(x)=-x^3+3ax\ (0\leqq x\leqq 1)$ の最大値と最小値を求めよ．(上級編) x^3の係数<0に注意しよう。

考え方 範囲が固定，グラフが変動するタイプ．
先ほどと同様，まずはグラフの形を決定しよう．本問の場合，$f'(x)=-3x^2+3a$ より，判別式 $D=36a$．問題文には a についての条件は全く書かれていないので，a の値によって，D の符号が変化します．



$a=0$ のときと $a<0$ のときはいずれも単調減少なので，$0\leqq x\leqq 1$ における最大値，最小値はすぐにわかりますが，厄介なのは，$a>0$ のときです．このときグラフは極大値と極小値をもつので注意が必要です．

$0\leqq x\leqq 1$ なので，グラフの右半分に注目します．グラフ中の $\boxed{ココ}$ の値が必要になるので，自分で求めておこう．なぜ必要なのかは自分で考えよう．

⇒注 $\boxed{ココ}$ の求め方
$-x^3+3ax=0$ より，$x=0,\ \pm\sqrt{3}a$
よって，$\boxed{ココ}$ は $x=\sqrt{3}a$.

もう
わかるで～

今回の3問は
どれもかなり
ムツカシイです。
でも，これらをマスター
すれば，最大最小問題は
もう完ぺきです。
くり返し 取り組もう。

解 $a\leqq 0$ のとき，y は単調減少なので，$x=0$ のとき最大値0，$x=1$ のとき最小値 $3a-1$.

$a>0$ のとき
最大値について
(i) $1\leqq\sqrt{a}$ のとき
（つまり $1\leqq a$ のとき）
$x=1$ のとき最大値 $3a-1$.

(ii) $\sqrt{a}\leqq 1$ のとき
（つまり $0<a\leqq 1$ のとき）
$x=\sqrt{a}$ のとき最大値 $2a\sqrt{a}$.

最小値について
(i) $1<\sqrt{3}a$ のとき
（つまり $\frac{1}{\sqrt{3}}<a$ のとき）
$x=0$ のとき最小値 0.

(ii) $\sqrt{3}a=1$ のとき
（つまり $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき）
$x=0$，1 のとき最小値 0.

(iii) $\sqrt{3}a<1$ のとき
（つまり $0<a<\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき）
$x=1$ のとき最小値 $3a-1$.