数Ⅱ 積分の 最終ラウンド

面積の重要応用問題

ガンバルぞ〜

これまでに学習したことを総動員して，応用問題に取り組もう．数学 Ⅱ の面積に関する応用問題は，もうネタが尽きている感があります．ある意味，定番中の定番の重要問題です．むしろ心配するのは計算ミスです．特に理系諸君にとっては，2 次試験は数学 Ⅲ の積分がメインになるので，数学 Ⅱ の積分はセンター試験のみの出題といっても過言ではありません．つまり，絶対に計算ミスしてはいけないのです．計算の負担を少しでも軽くするのが次の公式です．

この公式は バッチリでーす

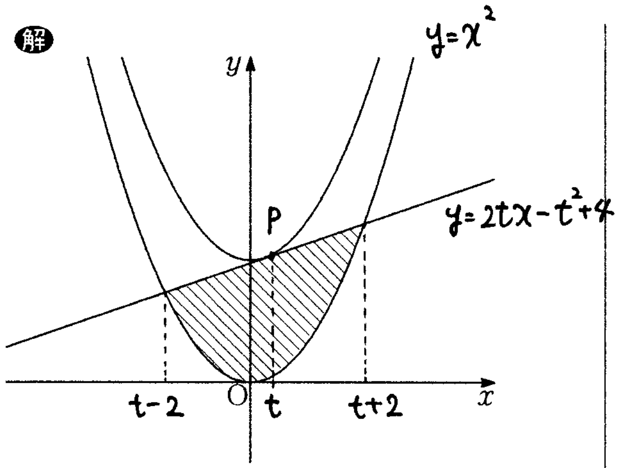
重要公式 $$-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

頻繁に，かつ，効果的に利用しよう．式変形をきちんと書いて，正確に使えるようにしておこう． OK!!

【応用問題 1】
放物線 $y = x^2 + 4$ 上の点 P における接線と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積は点 P の選び方に関係なく一定であることを示せ.

考え方 点 P をどのように選んでも面積が一定であるということは，つまり点 P の x 座標を t として面積を計算しても，最終的に t が消えて一定の値になるということです．当然ながら，$y = x^2 + 4$ のグラフは $y = x^2$ のグラフを上へ 4(y 軸方向に 4) 平行移動したものなので同じ形です．交点もありません．

解



点 P$(t,\ t^2+4)$ とする.
$y = x^2 + 4$ 上の点 P における接線の方程式は

$$y-(t^2+4) = 2t(x-t)$$
$$y = 2tx - t^2 + 4$$

この直線と，$y = x^2$ との交点の x 座標は

$$x^2 = 2tx - t^2 + 4$$
$$x^2 - 2tx + t^2 - 4 = 0$$
$$(x-(t+2))(x-(t-2)) = 0$$
$$\therefore\ x = t+2,\ t-2$$

この因数分解は なかなか思いつかないよ〜 ムリ〜

Pのx座標tが t+2, t-2の中点に なっているようです…. そうみたい

したがって，求める図形の面積は

(上の関数) − (下の関数)

$$S = \int_{t-2}^{t+2} (\underline{2tx - t^2 + 4} - \underline{x^2})\,dx$$
$$= -\int_{t-2}^{t+2} (x^2 - 2tx + t^2 - 4)\,dx$$
$$= -\int_{t-2}^{t+2} (x-(t-2))(x-(t+2))\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\{(t+2)-(t-2)\}^3$$
$$= \frac{32}{3}$$

ここで公式使う

tがなくなった!! す〜すごっ!!

よって，点 P の位置に関係なく面積は $\dfrac{32}{3}$ で一定となる.

■

注 実は交点を求めた段階で面積が一定になるのはわかっているのです．なぜなら，放物線と直線で囲まれた面積は，上の **重要公式** を用いるので，交点の x 座標の差 $(\beta-\alpha)$ の値で決まります.

今回の場合，交点の x 座標が $t+2$ と $t-2$ なので，差は 4 で一定です．t に依存しません．このことから面積が一定になるのは明らかなのです.

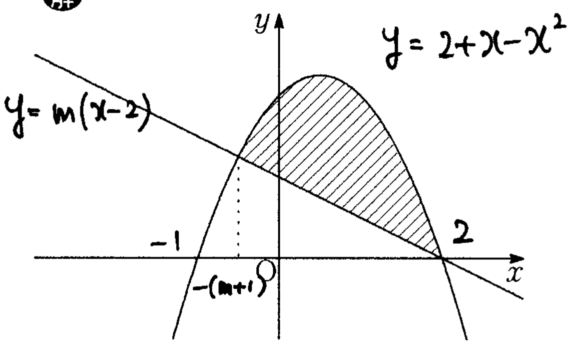
ということは，因数分解できたことが 最大のポイントやったわけね… 思いつかない場合は，解の公式しかないね…

【応用問題 2】
放物線 $y=2+x-x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を点 (2, 0) を通る直線 g で 2 等分するとき，g の傾きを求めよ．

これを どう式でおくか…

考え方 まずは傾きを設定して直線 g の式をおこう．交点はうまく因数分解できるので求まります（うまく因数分解できるのは当たり前ですね）．あとは条件にしたがって立式するだけ．公式をうまく使って手際よく面積計算しよう．むしろ，最後に値を簡単にする部分が難しいかも ……(無理に変形しなくてかまいません)．

解



直線 g の式のおき方がポイント!!

直線 g の傾きを m とする．g は点 (2, 0) を通り，傾き m の直線なので，$y=m(x-2)$ とおける．このとき，g と $y=2+x-x^2$ との交点の x 座標は

$$2+x-x^2=m(x-2)$$
$$x^2+(m-1)x-2(m+1)=0$$
$$(x-2)(x+(m+1))=0$$
$$\therefore\ x=2,\ -(m+1)$$

やっぱり因数分解

放物線も直線もともに (2, 0) を通るので $(x-2)$ でくくれるのは当然ですよ

あっ そーかー

放物線 $y=2+x-x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積は，

$$\int_{-1}^{2}(2+x-x^2)\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(2-(-1))^3=\frac{9}{2}$$

やっぱり公式使う

放物線 $y=2+x-x^2$ と g で囲まれた図形の面積は，

$$\int_{-(m+1)}^{2}\{2+x-x^2-m(x-2)\}\,dx$$
$$=-\int_{-(m+1)}^{2}\{x^2+(m-1)x-2(m+1))\}\,dx$$
$$=-\int_{-(m+1)}^{2}(x-2)(x+(m+1))\,dx$$
$$=\frac{1}{6}\{2+(m+1)\}^3=\frac{1}{6}(m+3)^3$$

ここでも公式使う

したがって，$\frac{1}{6}(m+3)^3=\frac{9}{2}\times\frac{1}{2}$

$$(m+3)^3=\frac{27}{2}$$
$$m+3=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$
$$\therefore\ m=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}-3=\frac{3\sqrt[3]{4}-6}{2}$$

■

公式使いまくりやなあ

もうなれたよ

✎注　$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ の変形は，分母の有理化をするために分母分子に $\sqrt[3]{4}$ をかけています．$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2$ です．

✎注　放物線と直線の交点を求めるときの因数分解ですが，放物線も直線も (2, 0) を通っているので，

$$2+x-x^2=m(x-2)$$
$$-(x+1)(x-2)=m(x-2)$$
$$(x+1)(x-2)+m(x-2)=0$$
$$(x-2)(x+1+m)=0$$

としても良いでしょう．

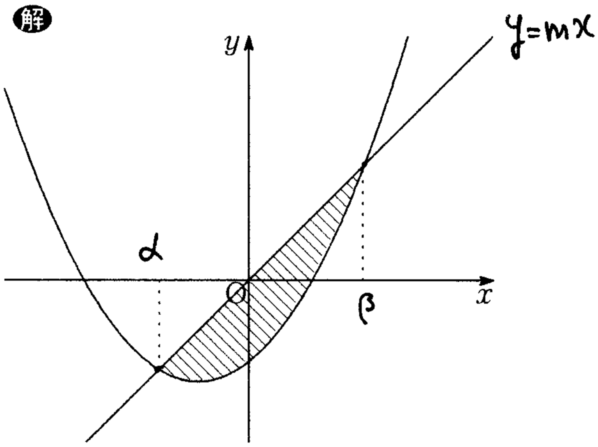
✎注　厳密には，g が題意のように交わるための m の条件を求め，適していることかどうか確認する必要があります．

はーい スルーしまーす

【応用問題 3】
放物線 $y=x^2+x-1$ と原点を通る傾き m の直線で囲まれた図形の面積が最小となるように m の値を求めよ．またそのときの面積を求めよ．

考え方 基本的な手法はこれまでと同じですが，この問題の厄介なところは，交点がスッキリと求まらないことです (因数分解できない)．だったら，とりあえず交点を α，β とでもおいて処理するしかありません．この手法はとても大切な考え方です．当然ながら，解と係数の関係を利用することになります．

解



$y=x^2+x-1$ と $y=mx$ の交点の x 座標は
$x^2+x-1=mx$
$x^2-(m-1)x-1=0$　さすがに今回は因数分解ムリ〜
の 2 つの解だから，これを α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=m-1,\quad \alpha\beta=-1$$

となる (なお，判別式 $D=(m-1)^2+4>0$ なので α，β は確かに実数である)．

このとき，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta mx-(x^2+x-1)\,dx\\&=-\int_\alpha^\beta(x^2-(m-1)x-1)\,dx\\&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

公式

ところで，　これは有名な対称式の変形

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(m-1)^2+4$$

しってる〜

より，$\beta-\alpha=\sqrt{(m-1)^2+4}$ なので，

$$S=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-1)^2+4}\right)^3$$

$\sqrt{}$ の中身だけに注目することがポイント

よって面積 S の最小値は ($\sqrt{}$ の中に注目して)，
$m=1$ のときで，このときの面積は $\dfrac{(\sqrt{4})^3}{6}=\dfrac{4}{3}$．

ナルホド〜

■

注 $x^2-(m-1)x-1=0$ を解の公式を用いて実際に解き，$\beta-\alpha$ を直接に計算しても構いません．
つまり，$x=\dfrac{(m-1)\pm\sqrt{(m-1)^2+4}}{2}$ より，

$$\beta-\alpha=\frac{(m-1)+\sqrt{(m-1)^2+4}}{2}-\frac{(m-1)-\sqrt{(m-1)^2+4}}{2}=\sqrt{(m-1)^2+4}$$

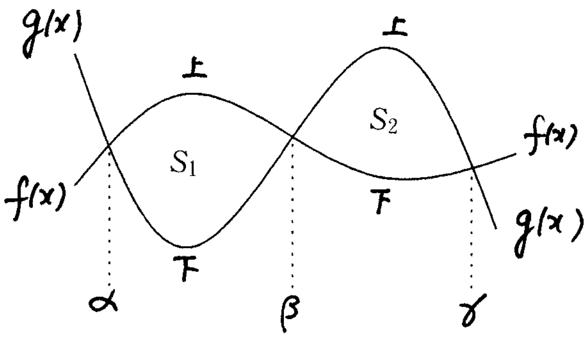
このやり方の方がメンドウやけどスッキリできるね
こっちもマスターしとこう!!

さて，次の【応用問題 4】にいく前に，次の重要な事実を紹介しておこう．

▷Point◁

2 つのグラフ $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が図のように交わっていて，囲まれた 2 つの部分の面積を S_1，S_2 とするとき，

$$S_1=S_2 \iff \int_\alpha^\gamma\{f(x)-g(x)\}\,dx=0$$



証明　$S_1=\int_\alpha^\beta \overset{上}{\{f(x)}-\overset{下}{g(x)\}}\,dx,\qquad S_2=\int_\beta^\gamma \overset{上}{\{g(x)}-\overset{下}{f(x)\}}\,dx$ ← 上下関係をまちがえないように

はーい

$$\begin{aligned}
S_1=S_2 &\iff \int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_\beta^\gamma \{g(x)-f(x)\}\,dx\\
&\iff \int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx-\int_\beta^\gamma \{g(x)-f(x)\}\,dx=0\\
&\iff \int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_\beta^\gamma \{f(x)-g(x)\}\,dx=0\\
&\iff \int_\alpha^\gamma \{f(x)-g(x)\}\,dx=0
\end{aligned}$$

注　$f(x)$ や $g(x)$ はどんな関数でもかまいません．真ん中の交点 β の前後で上下関係が入れ代わっている場合には，β は関係なく，両端の交点 α から γ までの積分の値が 0 になるのです．

【応用問題 4】
$0<a<1$ とする．曲線 $y=x^3-x^2$ と直線 $y=a^2(x-1)$ で囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるような定数 a の値を求めよ．

考え方　これまで通りに，交点を求めて図示し，位置関係を把握しよう．その後，上で紹介した有名事実を用います．

解

$x^3-x^2=a^2(x-1)$ より，

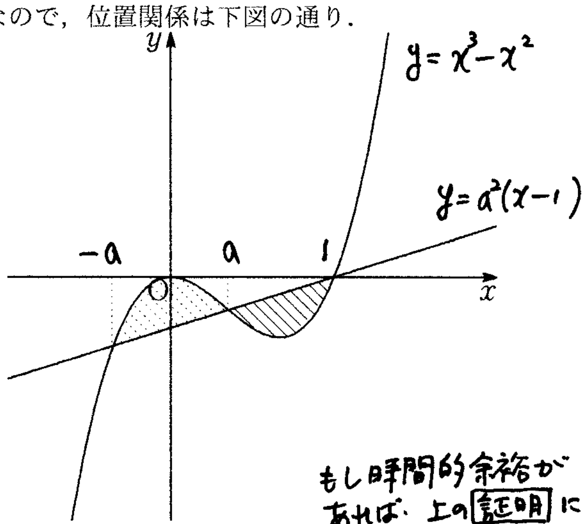
$x^2(x-1)=a^2(x-1)$

$(x-1)(x^2-a^2)=0$

$(x-1)(x+a)(x-a)=0$

$x=1,\ a,\ -a$

$0<a<1$ よりこれらの大小関係は $-a<a<1$ なので，位置関係は下図の通り．



もし時間的余裕があれば上の$\boxed{証明}$に従って式変形して導こう。

よって，

$$\int_{-a}^{1}\{(x^3-x^2)-a^2(x-1)\}=0$$

より，

$$\left[\frac14x^4-\frac13x^3-\frac{a^2}{2}x^2+a^2x\right]_{-a}^{1}=0$$

$$\left(\frac14-\frac13-\frac{a^2}{2}+a^2\right)-\left(\frac14a^4+\frac13a^3-\frac12a^4-a^3\right)=0$$

慎重に計算しよう

ミスがこわい…

$$-\frac{1}{12}+\frac12a^2+\frac14a^4+\frac23a^3=0$$

$$3a^4+8a^3+6a^2-1=0$$

$$(a+1)^3(3a-1)=0$$

省略したけど… 大丈夫か? 組立除法 2回!!

したがって，$0<a<1$ より，$a=\dfrac13$

■

注　うすうす気づいていると思いますが，3 次関数と直線が交わってできる 2 つの部分の面積が等しいのは，直線が 3 次関数の点対称の中心点（ド真ん中の点）を通るときです．

そんな気がしてたよ…

やっぱり～

一般に，3 次関数の点対称の中心は「変曲点」とよばれ，$f''(x)$ の符号変化が起こる点のことです．今回の場合，$y=x^3-x^2$ で，$y'=3x^2-2x$，$y''=6x-2$，よって，y'' は $x=\dfrac13$ の前後で符号変化が起こるため，$x=\dfrac13$ が変曲点（つまり点対称の中心点）の x 座標です．ことのき y 座標は $y=\dfrac{1}{27}-\dfrac19=-\dfrac{2}{27}$.

よって，直線 $y=a^2(x-1)$ が点 $\left(\dfrac13,\ -\dfrac{2}{27}\right)$ を通るので，代入すれば $a=\dfrac13$ が得られます．

うまいことなってるなー

スゲ～