とっても楽に
計算できる.
という意味です

おいしい面積の話

おいしい面積!?
面積って どんな味するの?

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ 上の異なる 2 点 $x = \alpha$, β における接線の交点を M とすると, M の x 座標は

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

また図のように S_1, S_2 を定めると

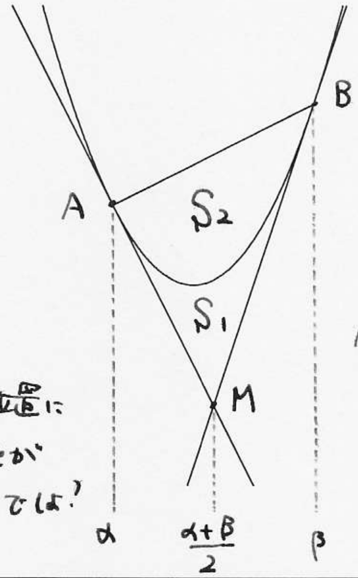
$$S_1 = \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3, \quad S_2 = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

つまり,

$$S_1 : S_2 = 1 : 2$$

が成立する.

それにしても、α. βの位置に
関係なく、これらのことが
成立するのは 不思議では!?



Mのx座標は
A、Bのx座標の
中点になってます

美しい!!

スゲ〜

これから証明しますが, $x = ax^2 + bx + c$ の場合の証明はちょっとメンドウなので, $y = x^2$ の場合で証明したいと思います. つまり, $y = x^2$ 上の 2 点 A$(\alpha,\ \alpha^2)$, B$(\beta,\ \beta^2)$ における接線を考えます.

M の座標について

これは フツーの
微分の問題

点 A における接線の方程式は, $y' = 2x$ より,

$y - \alpha^2 = 2\alpha(x-\alpha)$ $\quad \therefore\ y = 2\alpha x - \alpha^2$

同様にして, 点 B における接線は, $y = 2\beta x - \beta^2$

したがって, 交点 M は連立方程式

$$\begin{cases} y = 2\alpha x - \alpha^2 & \cdots ① \\ y = 2\beta x - \beta^2 & \cdots ② \end{cases}$$

①② より,

楽勝
よゆう

$$2\alpha x - \alpha^2 = 2\beta x - \beta^2$$
$$2(\alpha-\beta)x - (\alpha^2-\beta^2) = 0$$
$$2(\alpha-\beta)x - (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = 0$$
$$(\alpha-\beta)(2x-(\alpha+\beta)) = 0$$

$\alpha \neq \beta$ より, $2x - (\alpha+\beta) = 0$

$$\therefore\ x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

A・Bの
x座標の中点

参考 なお y 座標も求めておくと, ① に代入して

$$y = 2\alpha\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha^2 = \alpha\beta$$

これも美しい

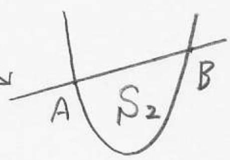
したがって, $\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$ となります. この結果はあくまでも $y = x^2$ の場合であって, 一般的な $y = ax^2 + bx + c$ の場合の y 座標はこんなにシンプルにはなりません.

なーんや
たまたまかあー

S_2 の面積について

直線 AB の方程式は

$$y - \alpha^2 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}(x-\alpha)$$
$$y - \alpha^2 = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}(x-\alpha)$$
$$y - \alpha^2 = (\alpha+\beta)(x-\alpha)$$
$$\therefore\ y = (\alpha+\beta)x - \alpha\beta$$



よって,

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_\alpha^\beta (\alpha+\beta)x - \alpha\beta - x^2\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

これは
公式!!

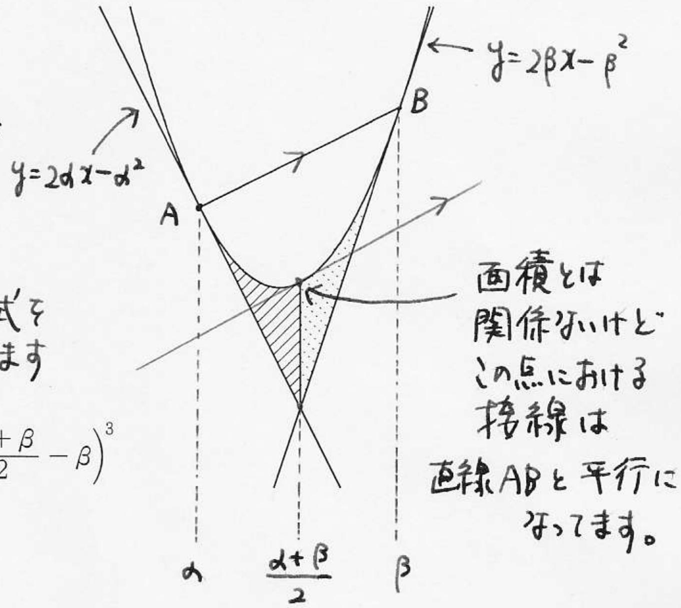
$\boxed{S_1 \text{ の面積について}}$

まず初めに，次の公式を証明しておきます．

$$\int (x-a)^2\,dx = \frac{1}{3}(x-a)^3 + C$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{3}(x-a)^3 + C\right)' \\
&= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2a + xa^2 - \frac{1}{3}a^3 + C\right)' \\
&= x^2 - 2ax + a^2 \\
&= (x-a)^2 \\
&\therefore \int (x-a)^2\,dx = \frac{1}{3}(x-a)^3 + C.
\end{aligned}$$

この公式を利用して S_1 の面積を計算してみよう．



(下の関数)が異なるので積分区間を分けて計算してます

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} x^2 - (2\alpha x - \alpha^2)\,dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} x^2 - (2\beta x - \beta^2)\,dx \\
&= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} x^2 - 2\alpha x + \alpha^2\,dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} x^2 - 2\beta x + \beta^2\,dx \\
&= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2\,dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x-\beta)^2\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right)^3 - \frac{1}{3}(\alpha-\alpha)^3 + \frac{1}{3}(\beta-\beta)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right)^3 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3 + \frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3 \\
&= \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

上の公式を使ってます

OK

同じ

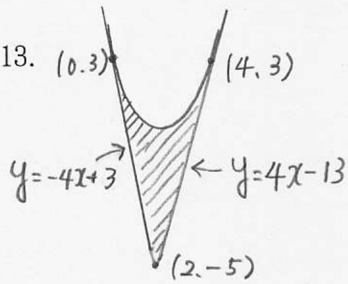
$$S_1 : S_2 = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3 : \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = 1:2$$

実に美しい　スゲ〜

注　この計算過程から，右上図の斜線部分と点線部分の面積が，α と β に関わらず等しいことが分かります．

$\boxed{\text{例 題}}$　放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と，この放物線上の点 $(4,\ 3)$，$(0,\ 3)$ における接線で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{\text{考え方}}$　答えだけで良ければ面積は一発で求まります．つまり，$S = \frac{1}{12}(4-0)^3 = \frac{16}{3}$ で終わり．接線を求める必要も全くありません．しかし，これで終わってしまうとあまりにもあっけなくて出題者に申し訳ないので，記述式のテストでは，この公式はあくまでも検算用にとどめ，途中の式を（ある程度は）きちんと書くべきです．式をきちんと書いて，最後の最後で公式をコソッと使うのがベスト．



解　$y' = 2x - 4$ より，点 $(4,\ 3)$ における接線は，$y - 3 = 4(x-4)$　$\therefore\ y = 4x - 13$.

点 $(0,\ 3)$ における接線は，$y - 3 = -4(x-0)$　$\therefore\ y = -4x + 3$.

接線の交点の x 座標は，$4x - 13 = -4x + 3$ より $x = 2$.

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^2 (x^2-4x+3) - (-4x+3)\,dx + \int_2^4 (x^2-4x+3) - (4x-13)\,dx \\
&= \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^4 (x^2 - 8x + 16)\,dx = \frac{16}{3}\ (\longleftarrow \text{最後でさりげなく使う})
\end{aligned}$$

■

注　こう言ってしまうと身も蓋もないんですが，現実問題として，センター試験など答えだけでよい大学入試問題でこのことが出題されるとは到底思えませんし，またいわゆる難関国公立大学の記述試験でも出題の可能性は低いと思います．つまり，その程度の公式だということです．

なーんや
それだけか…