積分とは「んぶび」？

？？？
なんのこと－？

微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の**不定積分**といい $\int f(x)\,dx$ と表します．$f(x)$ の不定積分を求めることを $f(x)$ を**積分する**といいます．つまり 積分とは微分の逆 です．

例えば「$3x^2$ の不定積分は？」と言われれば，「微分すると $3x^2$ になる関数は何ですか？」という意味です．この場合，x^3 や x^3+1，x^3-2，$x^3+\sqrt{3}$，…… など，いろいろあります．よって，

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$x^3 + C \ \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}}\ 3x^2$$

微分と積分は行ったり来たりの関係やなあ

と定数付きで表現します．つまり不定積分は無数にあります（だから「不定」という言葉が付いているのですね）．

✎注　単純に「積分は微分の逆」と言いましたが 実はそうではありません．そのうち真実を教えます．

✎注　「微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の不定積分という」と定義しましたが，どんな関数にも必ず不定積分が存在するのでしょうか．つまり，微分するとその関数になるような関数が絶対にあると断言できるのでしょうか．実は「不定積分は必ず存在するが，実際に表すことはできない」という場合があります．「あるのに見せれない」という変な状況です．でも，こんなヤバイ場合は高校段階では登場しないので安心してください．

―▷Point◁―

$f(x)$ の不定積分の一つを $F(x)$ とするとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\, F(x) \,\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

と定義する．

✎注　「不定積分の一つ」という表現ですが，$f(x)$ の不定積分は無数にあるので，そのうちの好きなのを一つ選べということです．

ほんまに何でもエエん？

つまり何を選んでも良いのですが，例えば，次の場合

$$\begin{aligned}\int_2^3 x^2\,dx &= \Big[\frac{1}{3}x^3 + C\Big]_2^3 \\ &= \Big(\frac{1}{3}\cdot 3^3 + C\Big) - \Big(\frac{1}{3}\cdot 2^3 + C\Big) \\ &= \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}\end{aligned}$$

ほんまや－
定数Cなんていらんわ

となり，結局，積分定数 C は消えてなくなります．

だから，**定積分の計算では，積分定数 C は最初から省略することにします．**

OK

例題　定積分 $\displaystyle\int_{-1}^4 (2x^2+5x-3)\,dx$ を計算せよ．

解 1

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^4 (2x^2+5x-3)\,dx \\ &= \Big[\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x\Big]_{-1}^4 \\ &= \Big(\frac{2}{3}\cdot 4^3 + \frac{5}{2}\cdot 4^2 - 3\cdot 4\Big) \\ &\qquad - \Big(\frac{2}{3}\cdot(-1)^3 + \frac{5}{2}\cdot(-1)^2 - 3\cdot(-1)\Big) \\ &= \frac{128}{3} + \frac{80}{2} - 12 - \Big(-\frac{2}{3} + \frac{5}{2} + 3\Big) \\ &= \frac{128}{3} + 40 - 12 + \frac{2}{3} - \frac{5}{2} - 3 \\ &= \frac{130}{3} - \frac{5}{2} + 25 \\ &= \frac{260 - 15 + 150}{6} = \frac{395}{6}\end{aligned}$$

計算ミスりそう

う～ん

解 2

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^4 (2x^2+5x-3)\,dx \\ &= \Big[\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x\Big]_{-1}^4 \\ &= \frac{2}{3}\{4^3 - (-1)^3\} + \frac{5}{2}\{4^2 - (-1)^2\} - 3\{4 - (-1)\} \\ &= \frac{2}{3}(64+1) + \frac{5}{2}(16-1) - 3\cdot 5 \\ &= \frac{130}{3} + \frac{75}{2} - 15 \\ &= \frac{260 + 225 - 90}{6} = \frac{395}{6}\end{aligned}$$

ちょっとは楽かなあ…

どっちの方法でやっても構いません．答えが出さえすれば良いです．個人的には **解 2** の計算方法がミスは少ないかなあと思います．

うん

うちのやり方でやるようにするわ

このように定積分の計算は非常にメンドウなのですが，負担を少しでも減らすために色々な工夫をする必要があります．次に紹介する定積分の公式はその代表格です．

▷Point◁

(1) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

bでつながるイメージ

定積分を分割したり合体したりできるのです!!

例 題　いちいち3回も定積分の計算をするのはメンドウ‥‥

$$\int_1^3 x^2\,dx - \int_2^3 x^2\,dx + \int_2^1 x^2\,dx$$
$$= \int_1^3 x^2\,dx + \int_3^2 x^2\,dx + \int_2^1 x^2\,dx \quad \text{(2)より}$$
$$= \int_1^1 x^2\,dx \quad \text{(3)より}$$
$$= 0 \quad \text{(1)より}$$

これはカンタン!!

定積分の定義に基づけば明らかですが，いちおう証明しときます．$f(x)$ の不定積分の一つを $F(x)$ とします．

(1) について．$\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

(2) について．$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx$

(3) について．$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = (F(b)-F(a)) + (F(c)-F(b)) = F(c)-F(a) = \int_a^c f(x)\,dx$

積分区間が $\displaystyle\int_{-a}^a$ の場合は，計算量を大幅に減らすことができます．いずれも面積をイメージすれば明らかなことです．

▷Point◁

$\displaystyle\int_{-a}^a x^2\,dx = 2\int_0^a x^2\,dx$

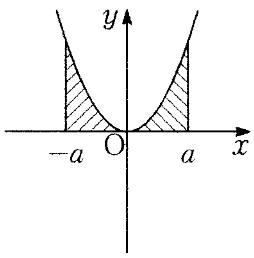
$\displaystyle\int_{-a}^a dx = 2\int_0^a dx$

一般に，$\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n}\,dx = 2\int_0^a x^{2n}\,dx$

$x^{偶数}$ の場合

$\int 1\,dx$ のことを $\int dx$ と表します。

いちおう，x^2 の場合を図示しておくと，$y = x^2$ は y 軸対称のグラフなので，図の斜線部分の面積は同じで定積分の値も同符号．



▷Point◁

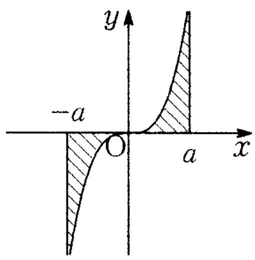
$\displaystyle\int_{-a}^a x^3\,dx = 0$

$\displaystyle\int_{-a}^a x\,dx = 0$

一般に，$\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n+1}\,dx = 0$

$x^{奇数}$ の場合

いちおう，x^3 の場合を図示しておくと，$y = x^3$ は原点対称のグラフなので，図の斜線部分の面積は同じだが定積分の値は異符号



奇数乗が一気に消える　積分区間を0からにして2倍する

例 題　$\displaystyle\int_{-3}^3 (2x^3+5x^2-3x+1)\,dx = \int_{-3}^3 (5x^2+1)\,dx = 2\int_0^3 (5x^2+1)\,dx = 2\left[\frac{5}{3}x^3 + x\right]_0^3 = 96$

はやっ

参考　一般的に $f(-x) = f(x)$ という関係を満たす関数を偶関数，$f(-x) = -f(x)$ という関係を満たす関数を奇関数といいます（$f(x) = x^{2n}$ は偶関数で，$f(x) = x^{2n+1}$ は奇関数）．偶関数は y 軸対称で奇関数は原点対称です．上の関係は，すべての偶関数，奇関数で成立します．つまり，

数Ⅲでくわしくやります。

$f(x)$ が偶関数のとき，$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$．　　$f(x)$ が奇関数のとき，$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$．

いかに無駄を省いて早く正確に計算するか．がポイント