接線の話

そもそも 微分法とは
接線を求めることから
始まったんだよね〜

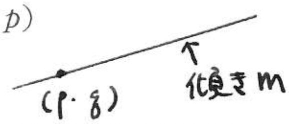
接線の方程式を求めるには，まずは，次のことが基本中の基本となります．

▷Point◁（基本その ①）

点 $(p,\ q)$ を通り，傾き m の直線の方程式は

$$y-q=m(x-p)$$

と表される．



▷Point◁（基本その ②）

$y=f(x)$ の $x=a$ における接線の傾きは $f'(a)$ である．

➾**注**　$f'(a)$ とは，$f'(x)$ の x に a を代入したものです．つまり，接線の傾きは接点の x 座標で決まるということが重要です．

f'(x) は接線の傾きではありませんよ！！

よくミスる…

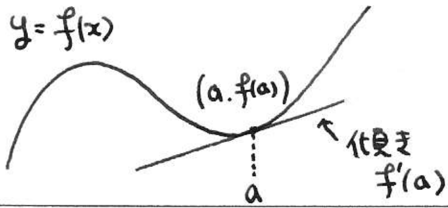
以上のことから，次の重要な公式が導かれます．

▷Point◁

$y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

と表される．



【例】　$y=x^3+3$ 上の点 $(-1,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ．

考え方

接線（つまり直線）は，通る点と傾きで決定します．本問の場合，点 $(-1,\ 2)$ が曲線 $y=x^3+3$ 上の点であることを意識しよう．

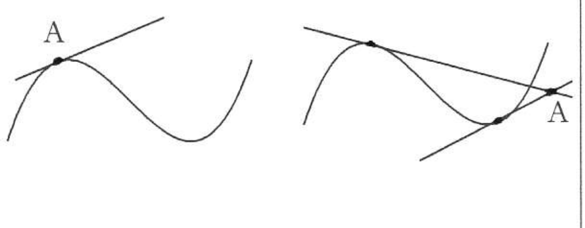
解

$y'=3x^2$ より，接線の傾きは $3(-1)^2=3$．
よって，求める接線の方程式は

$$y-2=3(x+1)$$
$$y=3x+5$$

➾**注** 次の表現の違いに注意しよう．

点 A における接線　≠　点 A を通る接線



点 A が接点　　　　点 A は接点とは限らない

しっかりと区別しよう

は－い

【例】　$y=x^2+3x+4$ の接線のうち原点を通るものを求めよ．

考え方

接線（つまり直線）は，通る点と傾きで決定します．接線の傾きは接点の x 座標で決まるから，まずは，自分で接点を設定する必要があります．

セッテン
セッテー

解

接点を $\mathrm{P}(t,\ t^2+3t+4)$ とおく．$y'=2x+3$ より，接線の傾きは $2t+3$．よって，点 P における接線の方程式は

$$y-(t^2+3t+4)=(2t+3)(x-t)\quad\cdots\cdots(※)$$
$$y-t^2-3t-4=(2t+3)x-2t^2-3t$$
$$y=(2t+3)x-t^2+4\quad\cdots\cdots①$$

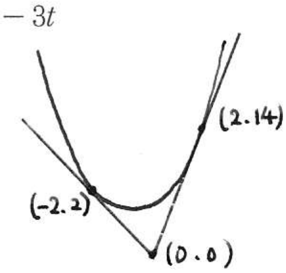
これが原点を通るので，

$$0=(2t+3)\times 0-t^2+4$$
$$t^2=4\quad\therefore\ t=\pm 2$$

したがって，① より，

$t=2$ のとき，$y=7x$

$t=-2$ のとき，$y=-x$



➾**注**　式変形に不安のある人は，(※) のままで止めて，(※) に $x=y=0$ を代入して，t を求めても構いません．

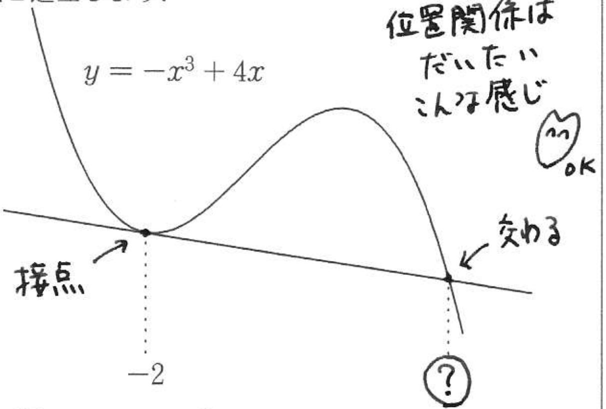
接点も
求めておこう

もっちろーん

それでは接線に関する重要問題を 4 問紹介しよう.

> **例題 1.**　$y=-x^3+4x$ 上の点 $(-2,\ 0)$ における接線が，この曲線と交わるもう一つの点の座標を求めよ.

考え方　2 つのグラフの共有点を求めるには，2 つのグラフの式を連立して解けばよいのです．そのために，まずは接線を求めて (これは楽勝)，もとの式と連立しよう.



解　$y'=-3x^2+4$ だから，接線の傾きは

$$-3(-2)^2+4=-8$$

したがって，点 $(-2,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y-0=-8(x+2)$$
$$y=-8x-16$$

これは楽勝

完ペキ♡

よって，もとの曲線との共有点は，連立方程式

$$\begin{cases} y=-x^3+4x \\ y=-8x-16 \end{cases}$$

の解であるので，

$$-x^3+4x=-8x-16$$
$$x^3-12x-16=0 \quad \cdots\cdots(※)$$
$$(x+2)(x^2-2x-8)=0$$
$$(x+2)(x+2)(x-4)=0$$
$$(x+2)^2(x-4)=0$$
$$x=-2(\text{重解}),\ 4$$

したがって，$x=-2$ で接し，$x=4$ で交わっていることがわかる．$x=4$ のとき，$y=-48$ だから，求める点は $(4,\ -48)$.

■

注　(※) 部分の因数分解は，組立除法を用いました.

1	0	−12	−16	−2
	−2	4	16	
1	−2	−8	0	

もちろん筆算で割り算しても構いません．いずれにしても，$x+2$ で必ずくくり出せることをがポイント.

なお，次の重要な事実が成立します.

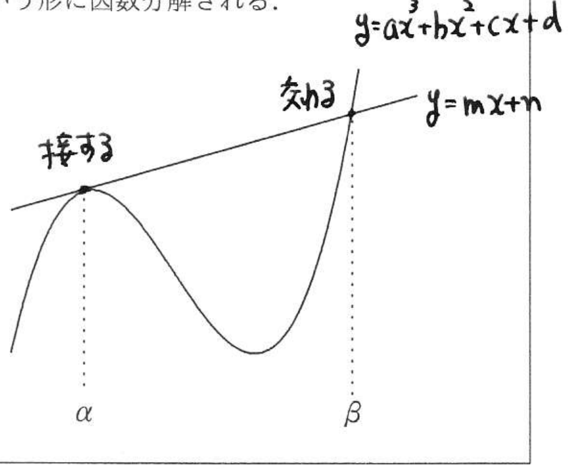
▷Point◁

3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ と直線 $y=mx+n$ が $x=\alpha$ で接し，$x=\beta$ で交わる場合，2 つの式を連立させると

$$\begin{cases} y=ax^3+bx^2+cx+d \\ y=mx+n \end{cases}$$

$$\iff \quad a(x-\alpha)^2(x-\beta)=0$$

という形に因数分解される.



このことを知っていれば，本問の場合，$x=-2$ で接することは初めから分かっているので，連立してできた 3 次方程式 (※) が

$$x^3-12x-16=(x+2)^2(\qquad)$$

形に因数分解できることは明らかなのです.

つまり，こういう形に
因数分解できなければ
どっかで間違えてることに
なるのね…

なるほどー

フムフム