例題 2.　3 次関数 $y = x^3 + ax + 2$ が $y = 9x - 14$ に接するように，定数 a の値を求めよ.

→判別式Dは. 2次式のときしか使えません

考え方 2 次関数と直線が接する場合なら，連立して判別式 $D = 0$ とすればできますが，3 次関数の場合は無理です．これまでと同様に，接線を考えるには接点が分からないとどうしようもありません．よって，まずは接点を設定します．重要なことは，

$$\text{曲線 } y = f(x) \text{ と直線 } y = mx + m \text{ が } x = p \text{ で接する.}$$
$$\Longleftrightarrow\ y = f(x) \text{ の } x = p \text{ における接線が } y = mx + n \text{ である.}$$

確かに そのとおりやわ

ナルホドー

ということ．つまり，$y = f(x)$ の $x = p$ における接線 $y - f(p) = f'(p)(x - p)$ が $y = mx + n$ に完全に一致するのだから，2 つの式の係数をそれぞれ比較すればよいのです.

解

接点の x 座標を p とすると，$x = p$ における接線の方程式は

$$y - (p^3 + ap + 2) = (3p^2 + a)(x - p)$$
$$y - p^3 - ap - 2 = (3p^2 + a)x - 3p^3 - ap$$
$$y = (3p^2 + a)x - 2p^3 + 2$$

これが $y = 9x - 14$ に一致するので，係数比較して，

$$\begin{cases} 3p^2 + a = 9 & \cdots① \\ -2p^3 + 2 = -14 & \cdots② \end{cases}$$

② より，$p^3 = 8$．p は実数だから，$p = 2$.

よって，① に代入して，$a = 9 - 12 = -3$.

■

注 いちいち接線を求めて係数比較するのがメンドウな場合は，右のような公式を使うこともできます.

▷Point◁

曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = mx + n$ が $x = p$ で接する

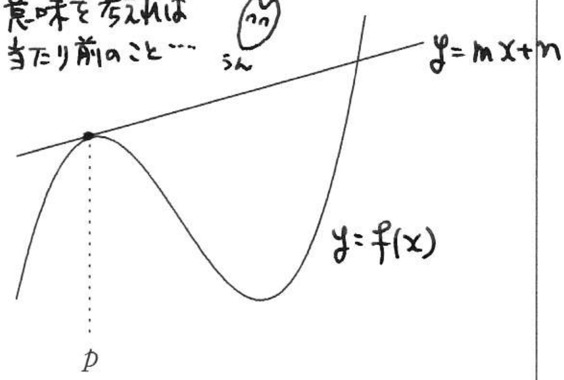
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(p) = mp + n \\ f'(p) = m \end{cases}$$

← x=pにおける y座標が同じ

← 接線の傾きが同じ

意味を考えれば 当たり前のこと…

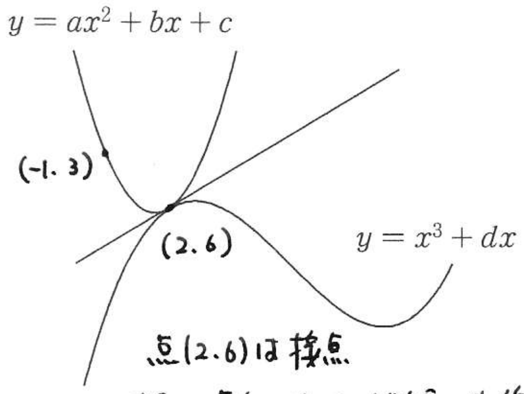
うん



例題 3.　点 (1, −3) を通る放物線 $y = ax^2 + bx + c$ が曲線 $y = x^3 + dx$ と点 (2, 6) において共通接線をもつ．このとき，定数 a, b, c, d を求めよ.

考え方 問題をよく読んで，まずは各曲線の位置関係を大ざっぱに把握しよう (左図参照．ただし正確ではない)．今回の場合は接点は分かっています.

例題 2. と同様に，曲線 $y = ax^2 + bx + c$ と曲線 $y = x^3 + dx$ 上の点 (2, 6) における接線をそれぞれ求めて，係数を比較しても良いのですが，文字が多くて煩雑になるので，次の公式を用いると簡単です.



点(2.6)は接点

さらに点(2.6)は、どちらの曲線上にもあります。

フムフム

▷Point◁

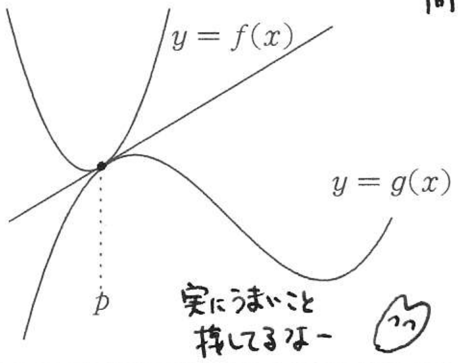
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=p$ において共通接線をもつ

$\Longleftrightarrow$ $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=p$ において接する．

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(p)=g(p) \\ f'(p)=g'(p) \end{cases}$$

$f(p)=g(p)$ ← x=pにおける y座標が同じ

$f'(p)=g'(p)$ ← 接線の傾きが同じ



実にうまいこと接してるなー

解　$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=x^3+dx$ とおくと，

$f'(x)=2ax+b$，$g'(x)=3x^2+d$．

$f(1)=-3$ より，

$$a+b+c=-3$$

$f(2)=g(2)=6$ より，

$$4a+2b+c=6,\quad 8+2d=6$$

$f'(2)=g'(2)$ より，

$$4a+b=12+d$$

以上を連立させて解くと，

$$a=2,\ b=3,\ c=-8,\ d=-1$$

■

a.b.c.dと文字が4つなので関係式も4つ必要になります。

そりゃそうや

参考　「曲線と直線が接する」と言われたら割と簡単にイメージできますが（例題 **2.** 参照），「曲線と曲線が接する」と言われたらどうでしょうか．そもそも，曲がった線と曲がった線が接するとは一体どういう状態のことを言うのでしょうか．実はこの 例題 **3.** がその意味を物語っています．つまり，**「2つの曲線が $x=p$ で接する」とは「2つの曲線が $x=p$ において共通の接線をもつこと」と定義するのです．** これはとても重要なことで（例えば，放物線と円の位置関係など），入試問題でも難問として出題されます．

ふーん ムズそう…

例題 **4.**　$y=x^2$ と $y=-(x-2)^2$ の共通接線の方程式を求めよ．

考え方　図示すれば，2つの曲線は共有点をもたないことがわかります．よって，この場合の共通接線とは，つまり，1本の直線がそれぞれの曲線にそれぞれ別の接点で接している線のことになります．したがって，それぞれの曲線の接点を設定する必要があります．

解　$y=x^2$ の $x=p$ における接線の方程式は，$y-p^2=2p(x-p)$．

つまり，$y=2px-p^2$ …①

$y=-(x-2)^2=-x^2+4x-4$ の $x=q$ における接線の方程式は，

$y-(-q^2+4q-4)=(-2q+4)(x-q)$

$y=(-2q+4)x+q^2-4$ …②

①と②が一致するので，係数を比較して，

$$\begin{cases} 2p=-2q+4 \\ -p^2=q^2-4 \end{cases}$$

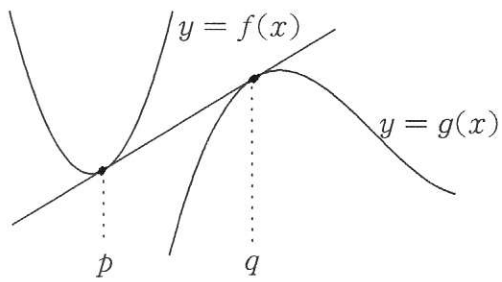
よって，$p=2$，$q=0$，または，$p=0$，$q=2$．

したがって，求める接線は，$y=4x-4$，$y=0$

■

▷Point◁

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が共通接線をもつ



$y=f(x)$ 上の $x=p$ における接線と，$y=g(x)$ 上の $x=q$ における接線とが完全に一致すると考える．つまり係数比較することになる．