接線と面積

入試によく出る重要テーマです

なお，以下の公式を利用するので最初に確認しておこう．この公式の一般的な証明は数学 III で学習しますが，結果だけでも知ってると便利．

$$\int (x+a)^n\,dx = \frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1} + C$$

なんとなくわかる..

1　2次関数の場合

2次関数とその接線で囲まれた部分の面積を求める問題は，入試頻出の重要問題です．代表的な2つの問題を紹介しよう．

例題 1

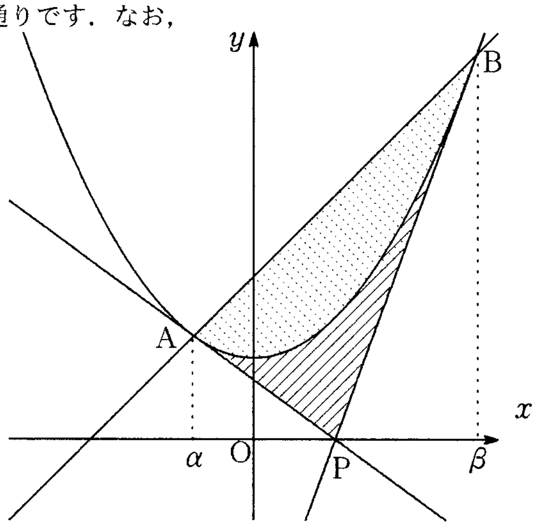
点 P(1, 0) から曲線 $C: y = x^2 + 2$ に引いた2本の接線の接点を A，B とする．

(1)　直線 AB の方程式を求めよ

(2)　2直線 PA，PB と曲線 C で囲まれる部分の面積 S_1，直線 AB と曲線 C で囲まれる部分の面積 S_2 を求めよ．

(3)　面積比 $S_1 : S_2$ を求めよ．

考え方 曲線 C と2本の接線の位置関係は以下の通りです．なお，



解

(1)　C 上の点 $(t,\ t^2+2)$ における接線の方程式は，$y = 2t(x-t)+t^2+2$ より，$y = 2tx - t^2 + 2$

これが点 P(1, 0) を通るので，$t^2 - 2t - 2 = 0$

この2次方程式の2つの解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とすると，解と係数の関係より

大切な考え方　実際に方程式を解かずに α, β として処理します

$\alpha + \beta = 2,\quad \alpha\beta = -2$

このとき，A$(\alpha,\ \alpha^2+2)$，B$(\beta,\ \beta^2+2)$ なので，直線 AB の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{(\beta^2+2)-(\alpha^2+2)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2+2 \\ &= \frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2+2 \\ &= (\beta+\alpha)(x-\alpha)+\alpha^2+2 \\ &= (\alpha+\beta)x-\alpha\beta+2 \\ &= 2x+4 \end{aligned}$$

和α+βと積αβをうまく使ってるネ

ナイス!!

(2)　点 A, B における接線の方程式は，それぞれ，$y = 2\alpha x - \alpha^2 + 2$．$y = 2\beta x - \beta^2 + 2$．よって，

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_\alpha^1 \{(x^2+2)-(2\alpha x-\alpha^2+2)\}\,dx \\ &\qquad + \int_1^\beta \{(x^2+2)-(2\beta x-\beta^2+2)\}\,dx \\ &= \int_\alpha^1 (x-\alpha)^2\,dx + \int_1^\beta (x-\beta)^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^1 + \left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_1^\beta \\ &= \frac{1}{3}(1-\alpha)^3 - \frac{1}{3}(1-\beta)^3 \\ &= \frac{1}{3}(1-\alpha)^3 + \frac{1}{3}(\beta-1)^3 \\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 + \frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

最初に紹介した公式より

ここで初めて α, β を具体的に代入します

➾注　$\alpha = 1-\sqrt{3}$ より，$1-\alpha = \sqrt{3}$

$\beta = 1+\sqrt{3}$ より，$\beta - 1 = \sqrt{3}$

ナルホド〜

なので，$1-\alpha = \beta-1$．つまり，P の x 座標が α と β の中点になっていることが分かります．

ふっしぎ〜

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_\alpha^\beta \{(2x+4)-(x^2+2)\}\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x^2-2x-2)\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

ここでも最後に α, β を代入します

➾注　$\beta - \alpha = (1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.

$(\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$ を使っても OK.

(3)　以上より $S_1 : S_2 = 1 : 2$　■

ヤッホーイ　実に美しい結果

注 一般に，下図において

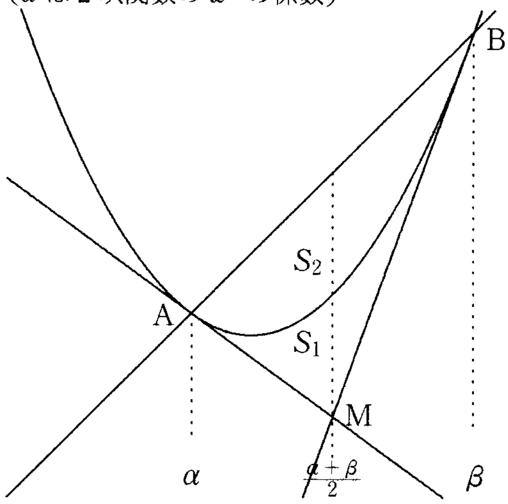
一般的に成りたつのネ

$$S_1=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3 \quad S_2=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$\boxed{S_1:S_2=1:2}$ が成立します．

知らんかった

(a は2次関数の x^2 の係数)



また，接点A，Bの x 座標の中点が2本の接線の交点Mの x 座標に一致し，交点の部分で面積は2等分されます．

参考 $y=x^2$ の場合で証明してみよう．

点Aにおける接線の方程式は，$y'=2x$ より，

$y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha)$ $\quad\therefore\ y=2\alpha x-\alpha^2$

同様にして，点Bにおける接線は，$y=2\beta x-\beta^2$

したがって，交点Mは連立方程式

$$\begin{cases} y=2\alpha x-\alpha^2 & \cdots① \\ y=2\beta x-\beta^2 & \cdots② \end{cases}$$

①②より，

$$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2$$
$$2(\alpha-\beta)x-(\alpha^2-\beta^2)=0$$
$$2(\alpha-\beta)x-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=0$$
$$(\alpha-\beta)(2x-(\alpha+\beta))=0$$

$\alpha \neq \beta$ より，$2x-(\alpha+\beta)=0$

$$\therefore\ x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

たしかにMのx座標がA-Bのx座標の中点になりました!!

ほんまや

$\boxed{S_2\text{の面積について}}$

直線ABの方程式は

$$y-\alpha^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}(x-\alpha)$$
$$y-\alpha^2=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}(x-\alpha)$$
$$y-\alpha^2=(\alpha+\beta)(x-\alpha)$$
$$\therefore\ y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$

よって，

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_\alpha^\beta (\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

①と②の結果が最終的に同じになりますよ

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}\,dx \leftarrow ① \\ &\quad + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta \{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}\,dx \leftarrow ② \\ &= \int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{x^2-2\alpha x+\alpha^2\}\,dx \\ &\quad + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta \{x^2-2\beta x+\beta^2\}\,dx \\ &= \int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2\,dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta (x-\beta)^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^3 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3 + \frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

①=②ですネ

お見事!! としか言いようのない式変形…

うまくいった!!

$$\therefore\ S_1:S_2=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3:\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=1:2$$

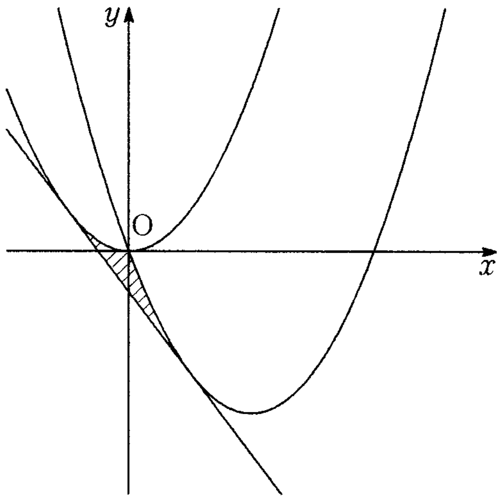
例題 2

2つの曲線 $C_1: y=x^2$，$C_2: y=x^2-4x$ がある．

(1) 曲線 C_1，C_2 の共通接線 l の方程式を求めよ

(2) 直線 l と曲線 C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

考え方 曲線 C_1，C_2 と共通接線 l の位置関係は以下の通りです．



共通接線 l の求め方は何通りかありますが，どうせ 2 つの接点の x 座標が必要になってくるので，次のような解法が良いかと思います．

解

(1)　曲線 C_1 上の点 $(\alpha,\ \alpha^2)$ における接線の方程式は $y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2$ より，$y=2\alpha x-\alpha^2$

曲線 C_2 上の点 $(\beta,\ \beta^2-4\beta)$ における接線の方程式は $y=(2\beta-4)(x-\beta)+\beta^2-4\beta$ より，$y=(2\beta-4)x-\beta^2$

これから一致するので，係数比較して

$$\begin{cases} 2\alpha=2\beta-4 & \cdots① \\ \alpha^2=\beta^2 & \cdots② \end{cases}$$

係数比較って大事やな…

② より，$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=0$.

$\alpha \neq \beta$ なので，$\alpha=-\beta$. ① に代入して計算すると，$\alpha=-1$，$\beta=1$ となるので，共通接線 l の方程式は $y=-2x-1$ となる．

(2)　C_1 と C_2 の共有点は $x^2=x^2-4x$ より $x=0$. したがって，求める面積 S は

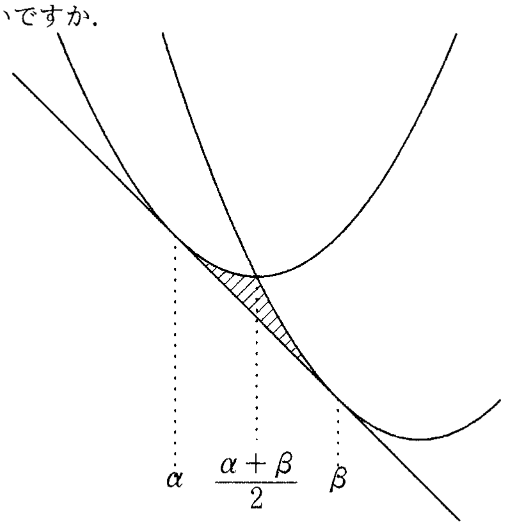
$$\begin{aligned} S&=\int_{-1}^{0}\{x^2-(-2x-1)\}\,dx \\ &\qquad+\int_{0}^{1}\{x^2-4x-(-2x-1)\}\,dx \\ &=\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx+\int_{0}^{1}(x-1)^2\,dx \\ &=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1} \\ &=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

■

注　一般に，交点をもつ同じ形の 2 つの放物線 (つまり x^2 の係数が等しい 2 次関数) とそれらの共通接線で囲まれた部分の面積 S は，2 次関数の x^2 の係数を a，接点を α，β とすれば，

$\boxed{S=\dfrac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3}$ となります．

それにしても図の斜線部の面積が，例題 **1** の S_1 と全く同じ式で求められるなんて不思議じゃないですか．



たしかに…
図が全くちがうのに同じ…
ふっしぎ〜
↓
でも実は
"あたりまえ"
なんだよネ

なお，2 つの接点の x 座標の中点が 2 つの放物線の交点の x 座標に一致します．このことを証明すれば，面積を求める計算式が，例題 **1** の S_1 と全く同じ式になることが，分かると思います．詳しい計算は省略するので，各自で確かめといてください．

参考　このように，コツコツ計算すれば証明することができますが，面積の本質を考えれば，結果は明らかで，一瞬で証明できます．以前に配ったプリント『面積の原理』を読んで各自で考えといてください．分からなければ質問に来てください．

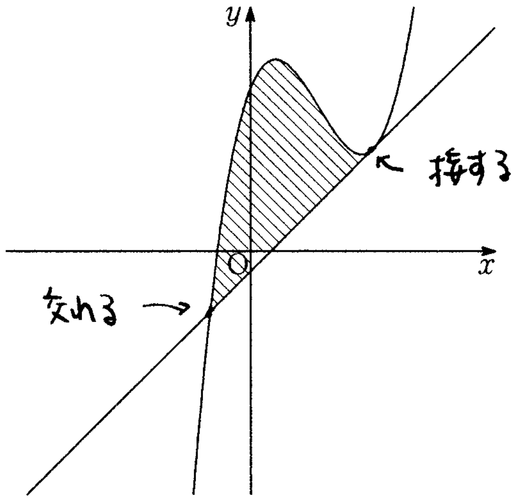
はーい

2　3 次関数の場合

3 次関数のグラフと接線で囲まれた部分の面積を求める問題は入試頻出の重要問題です．

> 例題 **3**　$y=x^3-5x^2+5x+8$ と，この曲線上の点 $(3,\ 5)$ における接線で囲まれた部分の面積を求めよ．

考え方　3 次関数のグラフと直線の位置関係は以下の通りです．



まずは接線を求めて，接線と 3 次関数との交点を求めねばなりません．

解

$y' = 3x^2 - 10x + 5$ だから，接線の傾きは $27-30+5=2$．したがって，点 $(3,\ 5)$ における接線の方程式は $y-5=2(x-3)$ より $y=2x-1$．

よって，もとの曲線との共有点は，

「接線の話」のくだりも見ておこう

$$x^3-5x^2+5x+8=2x-1$$
$$x^3-5x^2+3x+9=0$$
$$(x-3)^2(x+1)=0$$
$$x=3(\text{重解}),\ -1$$

前にもやったネ

うん

したがって，$x=3$ で接し，$x=-1$ で交わっていることがわかる．

$$\int_{-1}^{3}\{(x^3-5x^2+5x+8)-(2x-1)\}\ dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(x^3-5x^2+3x+9)\,dx$$
$$=\left[\ \frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\ \right]_{-1}^{3}$$
$$=\frac{1}{4}(81-1)-\frac{5}{3}(27+1)+\frac{3}{2}(9-1)+9(3+1)$$
$$=20-\frac{140}{3}+12+36$$
$$=68-\frac{140}{3}$$
$$=\frac{64}{3}$$

落ち着いて計算しよう

決してムツカシくない

うん がんばる… ■

参考 一般的に計算してみよう．

この変形がポイント!!

x−αの形をつくります

x−αの形をくずさずに式変形

公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2((x-\alpha)-(\beta-\alpha))\,dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}\,dx$$
$$=\left[\ \frac{1}{4}(x-\alpha)^4-\frac{\beta-\alpha}{3}(x-\alpha)^3\ \right]_{\alpha}^{\beta}$$
$$=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4-\frac{\beta-\alpha}{3}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)(\beta-\alpha)^4=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

この計算結果から，図のように 3 次関数とその接線で囲まれる部分の面積 S は 3 次関数の x^3 の係数を a とするとき，

$$\boxed{S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4}$$

ややこしいので無理に暗記しなくてエエよ．

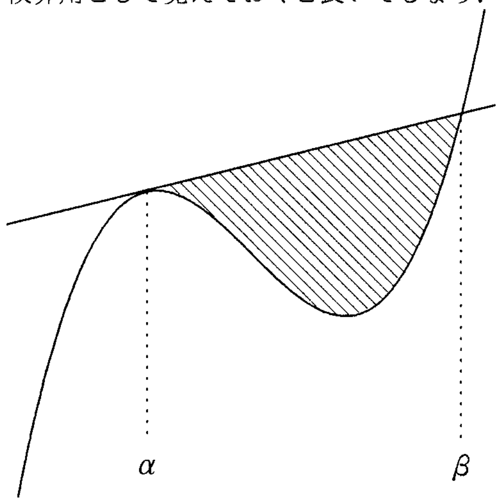
となります．

したがって，最初の 例題 **3** の場合，

$$S=\frac{1}{12}(3-(-1))^4=\frac{64}{3}$$

と一発で求まります．

検算用として覚えておくと良いでしょう．



なお，α と β のどちらが接点，交点でも構いません．

以上の 3 問は超有名問題で，これまでにも数多くの大学で出題されてきました．なので，「何をもう今さら・・・」という気がしないわけではありませんが，当たり前のことを当たり前にできることが求められる昨今，なかなか侮れない問題です．一般的な公式も紹介していますが，こんな公式に頼らずに，正確にキチッと計算できることの方が重要だと思います．頑張ってください．