赤阪正純 (http://inupri.web.fc2.com)

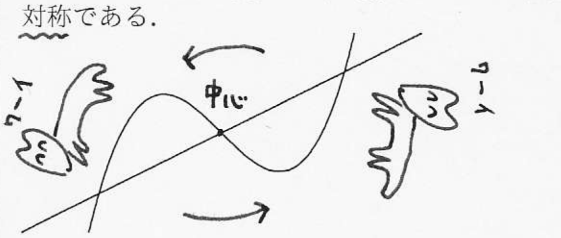
3次関数の絶妙な対称性

前から気になってたよ
どんな秘密があるのかな～

3次関数のグラフにはいろいろと特徴があります．1つずつ検証していきたいと思います．

▷Point◁(特徴①)

3次関数 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフは，点 $\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ に関して点対称である．



考え方 計算の簡略化のため，$-\dfrac{b}{3a}=\alpha$ とおきます．$y=f(x)$ のグラフが点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ に関して点対称であることを示すには，点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ が原点に来るようにグラフを平行移動し，移動先のグラフが原点対称であることを示せばよいです．

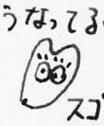
一般に，関数 $y=f(x)$ が原点対称であるとは，$f(-x)=-f(x)$ が成立するときをいいます（いわゆる奇関数）．今回の場合，3次関数なので，式が x^1 と x^3 の項だけ，つまり x^2 の項と定数項が存在しなければよいのです．

解 $-\dfrac{b}{3a}=\alpha$ とおく．

3次関数 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 上の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ が原点に来るように平行移動する．このとき，x 軸方向に $-\alpha$，y 軸方向に $-f(\alpha)$ 平行移動することになるから，関数 $y=f(x)$ は，$y+f(\alpha)=f(x+\alpha)$ に移動される．つまり

$$y=a(x+\alpha)^3+b(x+\alpha)^2+c(x+\alpha)+d-f(\alpha)$$

この式を $g(x)$ とおく．



ほんまにそうなってるわ
スゴッ

$g(x)$ の x^2 の係数は，

$3a\alpha+b=3a\left(-\dfrac{b}{3a}\right)+b=0$

$g(x)$ の定数項は，

$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d-f(\alpha)=f(\alpha)-f(\alpha)=0$

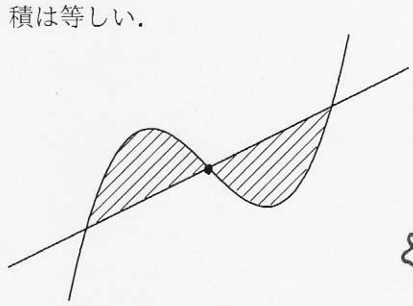
よって，$g(-x)=-g(x)$ が成立するので $y=g(x)$ のグラフは原点対称である．

したがって，3次関数 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフは，点 $\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ に関して点対称であることが示せた． ■

このことから次のことがわかります．

▷Point◁(特徴①′)

3次関数 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフと，点 $\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ を通る直線が3点で交わるとき，囲まれた2つの部分の面積は等しい．



そりゃそうやな

このことをテーマにした問題は，たくさんあります。

点対称なので当たり前ですね．180度回転すれば重なるからです．

参考 3次関数の点対称の中心を3次関数の変曲点といいます．一般に，$y=f(x)$ の変曲点の x 座標は $f''(x)=0$ を解けば求められます（正確には，$f''(x)$ の符号変化が起こる点という意味）．$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を2回微分すると，$f''(x)=6ax+2b$ なので，$f''(x)=0$ より，$6ax+2b=0$．よって，$x=-\dfrac{b}{3a}$ となり確かに一致しています．詳しくは数学Ⅲで学習します．

▷Point◁(特徴②)

3次関数 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をもつとする．このとき，$(\alpha,\ f(\alpha))$ と $(\beta,\ f(\beta))$ の中点が，点対称の中心点 $\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ である．

考え方 特徴①より，$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を点 $\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ が原点に来るようにグラフを平行移動すれば，原点対称になることがわかっているので，最初から3次関数のグラフを $y=px^3+qx$ として考えよう．となれば，3次関数 $y=px^3+qx$ の極大点と極小点の中点が原点であることを示せばよいのです．

こうすれば計算がラク

ナルホド～
うまい!!

解 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を

点 $\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ が原点に来るように平行移動したグラフは原点対称なので，そのグラフを $y = g(x) = px^3 + qx$ とおく．

$g'(x) = 3px^2 + q = 0$ の 2 つの解を α, β とすれば，解と係数の関係より，$\alpha + \beta = 0$ となる．このとき，$\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 0$ であり，さらに，

$$\begin{aligned}
&\frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}\\
&=\frac{p(\alpha^3+\beta^3)+q(\alpha+\beta)}{2}\\
&=\frac{p(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)+q(\alpha+\beta)}{2}=0
\end{aligned}$$

うまいこと
なってるなー

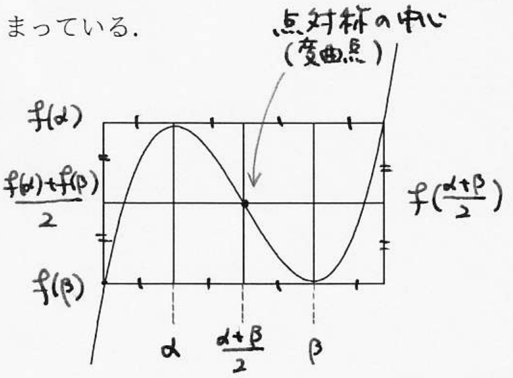
したがって，$(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$ の中点 $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}\right)$ は，原点に一致する．

よって，題意は証明された．

■

▷Point◁(特徴 ③)

3 次関数のグラフは，次のようにきれいに納まっている．



考え方　先ほどと同様，平行移動したグラフ $y = g(x) = px^3 + qx$ の場合に証明すれば十分です．ちょうど 4 等分されているのが不思議だと思いませんか．

解　3 次関数の式を $y = g(x) = px^3 + qx$ $(p > 0)$ とおく．

先ほどの特徴 ② より，極大点，極小点は原点対称なので，極値をとる x を $x = \alpha$, $x = -\alpha$ とする $(\alpha > 0)$．

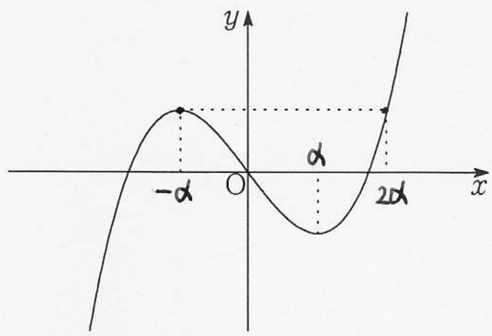
$g'(\alpha) = 0$ より，$3p\alpha^2 + q = 0$. $q = -3p\alpha^2$

このとき，

$g(-\alpha) = -p\alpha^3 - 3q\alpha = -p\alpha^3 - 9p\alpha^3 = -10p\alpha^3$

$g(2\alpha) = 8p\alpha^3 + 6q\alpha = 8p\alpha^3 - 18p\alpha^3 = -10p\alpha^3$

よって，$g(-\alpha) = g(2\alpha)$ となり，各点の位置関係は下図のようになる．



したがって，3 次関数のグラフの点対称性より題意は証明された．

■

次は 3 次関数の特徴でありませんが，よく問われる有名事実なので紹介しておきます．ひたすら計算で示すこともできますが，ちょっと面白い方法でやってみます．定積分を利用する方法です．

▷Point◁(有名事実)

3 次関数 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $x = \alpha$ で極大値，$x = \beta$ で極小値をもつとする．このとき，極大値と極小値の差は $\dfrac{a}{2}(\beta - \alpha)^3$ である．

解　$f(\alpha) - f(\beta)$ は次のように表すことができる．

この式がポイント

$$f(\alpha) - f(\beta) = \int_\beta^\alpha f'(x)\,dx \qquad \left(= \Big[f(x)\Big]_\beta^\alpha\right)$$

α, β は $f'(x) = 0$，つまり，$3ax^2 + 2bx + c = 0$ の 2 つの実数解であるので，

$$f'(x) = 3a(x-\alpha)(x-\beta)$$

フムフム

したがって，

$$\begin{aligned}
f(\alpha) - f(\beta) &= \int_\beta^\alpha f'(x)\,dx\\
&= \int_\beta^\alpha 3a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&= 3a\int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&= 3a \times \left(-\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3\right)\\
&= \frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

この計算はマジですごい…

公式です

感動

■

参考　1998 年の東京大学でこのことをテーマにした問題が出題されました．上の計算手法を知らないと，計算地獄に陥ること必至です．

さすが東大!!