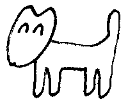
定積分にまつわる話



ちょっとややこしいけど
特に理系の人にとっては
とても大切な内容なので
しっかり理解しよう。

まず始めに次のことを確認しておこう．

▷Point◁

> どの文字について微分するのか，どの文字について積分するのかを常に意識すること．

例えば，$y = x^2 + 3t^2x$ の場合，単に y' としただけではどの文字について微分するのかわからないので答えようがありません．よって，次のような表記方法を導入します．なお，x と t は互いに無関係とします．

y を x で微分 する $\longrightarrow$ x 以外は定数扱い

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3t^2x) = 2x + 3t^2$$

y を t で微分 する $\longrightarrow$ t 以外は定数扱い

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(x^2 + 3t^2x) = 6tx$$

フムフム

積分についても同様で，どの文字について積分するのかによって答えが変わってきます．

y を x で積分 する $\longrightarrow$ x 以外は定数扱い

$$\int y\,dx = \int (x^2+3t^2x)\,dx = \frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}t^2x^2+C$$

y を t で積分 する $\longrightarrow$ t 以外は定数扱い

$$\int y\,dt = \int (x^2+3t^2x)\,dt = x^2t+t^3x+C$$

となります．

フムフム

このように，どの文字について微分するのか，どの文字について積分するのかは常に意識せねばなりません．

はーい
意識しまーす

注 「x と t は互いに無関係」という条件はムチャクチャ重要で，これがないと上の計算は全くのデタラメになります．じゃあ，x と t に関係がある場合はどーすんねんって話になりますがその場合は数学 Ⅲ「合成関数の微分法」を利用する必要があります．

注 x と t に関係があろうとなかろうとゴーインに一方の文字だけに注目して微分することを偏微分といって大学で学習します．$\dfrac{\partial y}{\partial x}$ とか $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ などと表記します．

定積分を考えるときは，次のことが重要になります．

▷Point◁

> 積分の式の見た目にビビらず，式の意味を考えて計算結果を予測すること．
>
> やっぱりビビるー

例えば，$f(x)$ を x だけで表された関数とすると，

$$\int f(x)\,dx = x\text{ の式},\quad \int f(t)\,dt = t\text{ の式}$$

これはOK

です．また，例えば，

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \text{定数},\quad \int_0^1 f(t)\,dt = \text{定数}$$

そりゃそうや

です．$f(x)$ を x で積分して，その x のところに 1 や 0 を代入するんだから，結果が定数になるのは当然のことです．また，さらに

$$\int_0^x f(t)\,dt = x\text{ の式}$$

た、たしかに…

も納得できるでしょう．t の関数 $f(t)$ を t で積分して，その t のところに x や 0 を代入するからです．

一般に，a，b を定数とするとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{定数},\quad \int_a^x f(t)\,dt = x\text{ の式}$$

となります．

これらのことは暗記するのではなく，式の意味を考えれば当然のことです．

わかりました

> **例題 1.**　$f(a) = \displaystyle\int_0^1 (2ax^2 - a^2x)\,dx$ の最大値を求めよ．

注 式を見て一瞬ギョッとしますが，落ち着いて式の意味を考えてみよう．まず dx とあるので，a を定数とみて x で積分せよということです．そして積分した後，x のところに 1 や 0 を代入するのだから，結局，x はなくなり a だけの式になります．つまり，最終的に a の関数とみて最大値を考えるわけです（だから $f(a)$ と書いてあるのです）．

解

$$f(a)=\left[\frac{2}{3}ax^3-\frac{1}{2}a^2x^2\right]_0^1$$

xで積分したから
xに1や0を代入する

$$=\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}a^2$$

単なる aの2次関数

$$=-\frac{1}{2}\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}$$

よって，$a=\dfrac{2}{3}$ のとき，最大値 $\dfrac{2}{9}$

■

1　$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ タイプの問題

先ほども述べたように，$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ は定数になります．なぜなら，

・積分の中身が t だけの式であること．

・その関数を t で積分し，その t に定数 a や b を代入するので，**結果的に変数 t がなくなること**．

だからです．したがって，次のことがポイントです．

▷Point◁

$$\int_a^b f(t)\,dt=A\ (\text{定数})\ とおく．$$

大切♡

とにかく Aとおけ

このことを踏まえて，次の問題を考えてみよう．いずれもとても重要な問題です．

例題 **2.**　次の (1)〜(4) の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(1)　$f(x)=x+\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$

ん？ナニ？ サッパリわからん

考え方　いきなりすぎてさっぱり分からないと思いますが，まずは式の意味を考えてみよう．まず $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$ は定数です．よって，これを A とおくと，もとの関係式から $f(x)=x+A$ となります．

問題は「$f(x)$ を求めよ」ですが，$f(x)$ は「$f(x)=x+A$」というように，この時点で，ほぼほぼ決定しています．あとは定数 A の値さえ分かれば，$f(x)$ が完全に決定します．よって，この問題は「$f(x)$ を求めよ」ですが，実質的に，「定数 A の値を求めよ」という問題になったわけです．では，どのようにして定数 A を求めるのでしょうか．

解

$\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$ は定数なので，これを A とおくと，$f(x)=x+A$ となる．よって，

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt=A & \cdots ① \\ f(x)=x+A & \cdots ②\end{cases}$$

② より，$f(t)=t+A$ として ① に代入すると，

そのまま f(x) を①に代入することはできません

$$\int_0^3 (t+A)\,dt=A$$

$$\left[\frac{1}{2}t^2+At\right]_0^3=A$$

$$\frac{9}{2}+3A=A\quad \therefore\ A=-\frac{4}{9}$$

フムフム

よって，$f(x)=x-\dfrac{4}{9}$.

■

注　式 ①，② を連立方程式だと思ってください．連立方程式の解法は加減法と代入法があったかと思いますが，今回は代入法を使ったわけです．しかし，② をそのまま ① に代入することはできません．② の x を t に変更してから ① に代入していることがポイントです．

(2)　$f(x)=\displaystyle\int_1^3 \{2x-f(t)\}\,dt$

考え方　今度は，$\displaystyle\int_1^3 \{2x-f(t)\}\,dt=A$ とはおけません．**積分の中身が t だけの式ではないため，定数にはならないからです**（最終的に x の式になります）．よって，適度に計算を進めて，置き換えができる形にもっていくことです．

意味を考えるんだったネ

解

$$f(x)=\int_1^3 \{2x-f(t)\}\,dt$$

tで積分 xは定数扱い

$$=\int_1^3 2x\,dt-\int_1^3 f(t)\,dt$$

$$=\Big[\,2xt\,\Big]_1^3-\int_1^3 f(t)\,dt$$

tに3や1を代入する

$$=2x(3-1)-\int_1^3 f(t)\,dt$$

$$=4x-\int_1^3 f(t)\,dt\quad\cdots(※)$$

$\int_1^3 f(t)\,dt$ は定数なので，これを A とおくと，$f(x)=4x-A$ となる．よって，

$$\begin{cases}\int_1^3 f(t)\,dt=A & \cdots ① \\ f(x)=4x-A & \cdots ②\end{cases}$$

② より，$f(t)=4t-A$ として ① に代入すると，

$$\int_1^3 (4t-A)\,dt=A$$

$$\Big[2t^2-At\Big]_1^3=A$$

$$16-2A=A \quad \therefore\ A=\frac{16}{3}$$

よって，$f(x)=4x-\dfrac{16}{3}$．

さっきと
全く同じ
ですネ

■

✎注　式 (※) までくれば，先ほどの (1) と全く同じですね．

(3)　$f(x)=x^2-\int_0^2 xf(t)\,dt+2\int_0^1 f(t)\,dt$

考え方　今度は 2 箇所に定積分がありますが，早合点して $\int_0^2 xf(t)\,dt=A$ などと置かないように．$\int_0^2 xf(t)\,dt$ は定数ではありません (x の式です)．

→ tだけの式ではないからです

前問同様に，置き換えが出来る形に少し変形します．

解

tで積分するので
xは定数扱い

$$f(x)=x^2-\int_0^2 xf(t)\,dt+2\int_0^1 f(t)\,dt$$

$$=x^2-x\int_0^2 f(t)\,dt+2\int_0^1 f(t)\,dt$$

xが前に出てくる

$\int_0^2 f(t)\,dt$，$\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数なので，これらを A，B とおくと，$f(x)=x^2-Ax+2B$ となる．よって，

3つの
連立方程式
です

$$\begin{cases}\int_0^2 f(t)\,dt=A & \cdots ① \\ \int_0^1 f(t)\,dt=B & \cdots ② \\ f(x)=x^2-Ax+2B & \cdots ③\end{cases}$$

③ より $f(t)=t^2-At+2B$ として ①② に代入．

$$\begin{cases}\int_0^2 (t^2-At+2B)\,dt=A \\ \int_0^1 (t^2-At+2B)\,dt=B\end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases}\frac{8}{3}-2A+4B=A \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{2}A+2B=B\end{cases}$$

計算は省略
しましたが
大丈夫ですね？
たぶん

これら A と B の連立方程式を解いて

$$A=\frac{4}{3},\ B=\frac{1}{3}.\quad \therefore\ f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$$

■

(4)　$f(x)=1+\int_0^1 (x-t)f(t)\,dt$

考え方　今度も，早合点して $\int_0^1 (x-t)f(t)\,dt=A$ などと置かないように．$\int_0^1 (x-t)f(t)\,dt$ は定数ではありません (x の式です)．

→ tだけの式ではないから

これまでと同様に，置き換えが出来る形に少し変形します．

解

$$f(x)=1+\int_0^1 (x-t)f(t)\,dt$$

$$=1+x\int_0^1 f(t)\,dt-\int_0^1 tf(t)\,dt$$

$\int_0^1 f(t)\,dt$，$\int_0^1 tf(t)\,dt$ は定数なので，これらを A，B とおくと，$f(x)=1+Ax-B$ となる．よって，

$$\begin{cases}\int_0^1 f(t)\,dt=A & \cdots ① \\ \int_0^1 tf(t)\,dt=B & \cdots ② \\ f(x)=1+Ax-B & \cdots ③\end{cases}$$

③ より $f(t)=1+At-B$ として ①② に代入．

$$\begin{cases}\int_0^1 (1+At-B)\,dt=A \\ \int_0^1 t(1+At-B)\,dt=B\end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases}1+\frac{1}{2}A-B=A \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}A-\frac{1}{2}B=B\end{cases}$$

計算は省略
しましたが
大丈夫ですね？
たぶん

これら A と B の連立方程式を解いて

$$A=\frac{12}{13},\ B=\frac{7}{13}.\quad \therefore\ f(x)=\frac{12}{13}x+\frac{6}{13}$$

■

2　$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ タイプの問題

うっかり
おくところ
やったわ

最初に述べたように，$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は x の式になります．**定数ではないので $=A$ などとは絶対に置けません．**まずは具定例で性質を検証してみよう．

【例】 $\displaystyle\int_1^x (t^2-3t+1)\,dt$ について

実際に積分計算してみよう．

$$\begin{aligned}&\int_1^x (t^2-3t+1)\,dt\\ &=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+t\right]_1^x\\ &=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+1\right)\\ &=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

tで積分し
tにxや1を代入

やっぱり
xの式に
なったー

$$\therefore\ \int_1^x (t^2-3t+1)\,dt=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{6}\ \cdots\ (※)$$

さて，(※) の右辺を <u>x で微分する</u> と，

$$\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{6}\right)'=x^2-3x+1$$

となり，もとの「積分の中身の t の式」の t が x に置き換わっただけになっています．つまり，

うわっ
ホンマや

$$\left(\int_1^x \underline{(t^2-3t+1)}\,dt\right)'=\underline{x^2-3x+1}$$

次に，(※) の (右辺) に $x=1$ を代入すると，

$$\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+1+\frac{1}{6}=\frac{2-9+6+1}{6}=0$$

しかし，(※) の (左辺) を見れば計算しなくても 0 になることは明らかです．なぜなら，(左辺) に $x=1$ を代入すると，$\displaystyle\int_1^1 (t^2-3t+1)\,dt=0$ となるからです (積分の上端と下端が一致するから)．

フムフム

以上をまとめると一般的に次のことが分かります．

▷Point◁

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ の形をみたら次の 2 つを考えること．

① x で微分する．$\displaystyle\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$

② $x=a$ を代入する．$\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt=0$

注 ① は「x の関数 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ を x で微分したら $f(x)$ になる」，つまり「積分の中身の t の式 $f(t)$ が x に入れ替わって $f(x)$ になって飛び出してくる」ことを意味しています．

理系は
こっちで

注 $\displaystyle\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'$ を，$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)$ とも書きます．「x で微分する」ということを強調した表現です．

同じ意味
なんだね

注 いちおう ① を証明しときます．
$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=F(t)$ とすると，$F'(t)=f(t)$．
このとき，

$$\int_a^x f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_a^x=F(x)-F(a)$$

よって，

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=(F(x)-F(a))'=F'(x)=f(x)$$

となります．$F'(t)=f(t)$ が成立するので $F'(x)=f(x)$ も成立します．あくまでも「その文字に関して形式的に微分している」と解釈すれば，とくに悩む必要もないでしょう．

まあね…

$\boxed{\text{例 題}}$ **3.**　次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a を求めよ．

$$\int_a^x f(t)\,dt=x^2+2x-3$$

$\boxed{\text{考え方}}$ 何度も言いますが，$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ は定数ではないので A などと置いてはいけません．

解 両辺を x で微分すると，

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=(x^2+2x-3)'$$

tがxに
かわる

$$\therefore\ \ f(x)=2x+2$$

微分スイッチ

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'\Longrightarrow \{f(x)\}$$

ドーン

もとの式の両辺の x に a を代入すると，
$\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt=0$ より，$a^2+2a-3=0$
$(a+3)(a-1)=0$ より，$a=-3,\ 1$

積分の中身
がxに
かわって
飛び出してくる!!

キャ〜

■

注　章の $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ タイプとは解法が全く違います．驚くほど簡単です．注意すべきことは $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ タイプと $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ タイプが混在して登場したときに，ちゃんと区別できるかどうかです．しっかりと意味を考えて区別してください．