絶対値付き関数の定積分

絶対値キラ〜イ

いやや〜

1　まずは基本から

基本が大切 まずは ここから

例題　$\displaystyle\int_0^3 (x^2-4)\,dx$

例題　$\displaystyle\int_0^3 |\,x^2-4\,|\,dx$

なにが違うの〜?

考え方　絶対値付きの関数の定積分は多くの人が苦手とする部分です．例えば (2) を次のように形式的にやってしまう人が非常に多いのです．

$$\int_0^3 |\,x^2-4\,|\,dx = \left[\,\left|\frac{1}{3}x^3-4x\right|\,\right]_0^3 = 3$$

これは全く間違っています．絶対にやめてください．

はへい

解

(1)　特に何も気にせずそのまま計算します．

$$\int_0^3 (x^2-4)\,dx = \left[\,\frac{1}{3}x^3-4x\,\right]_0^3 = -3$$

(2)　まずは絶対値をはずすことを考えます．積分区間 $0 \leqq x \leqq 3$ において，

$0 \leqq x \leqq 2$ のとき，$|\,x^2-4\,| = -(x^2-4)$

$2 \leqq x \leqq 3$ のとき，$|\,x^2-4\,| = x^2-4$

なので，

x=2の前後で関数が変わる

積分区間が分割されるのね

フムフム

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 |\,x^2-4\,|\,dx \\
&= \int_0^2 -(x^2-4)\,dx + \int_2^3 (x^2-4)\,dx \\
&= \left[\,-\frac{1}{3}x^3+4x\,\right]_0^2 + \left[\,\frac{1}{3}x^3-4x\,\right]_2^3 \\
&= -\frac{8}{3}+8+\frac{1}{3}(3^3-2^3)-4(3-2) \\
&= \frac{23}{3}
\end{aligned}$$

■

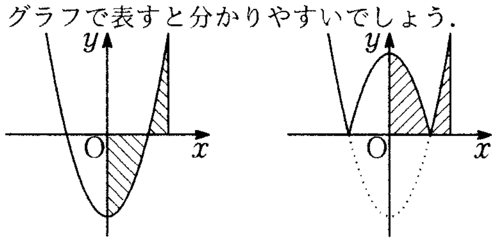
☆ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と $\displaystyle\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx$ の違い☆

(1) は答えが負の数になっています．ひょっとすると，こう思った人はいませんか．「定積分は面積のことなのに，なぜ負の数になるのかな？」と．これはよくカン違いするところです．定積分の値は面積ではありません．機械的な積分計算から算出される単なる値です．

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は，積分区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$ の場合に限り，$y = f(x)$ と x 軸，$x = a$，$x = b$ で囲まれた部分の面積を表しています．

一方，$|\,f(x)\,| \geqq 0$ なので，$y = |\,f(x)\,|$ のグラフは x 軸よりも常に上にあります．したがって，定積分 $\displaystyle\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx$ は，$y = |\,f(x)\,|$ と x 軸，$x = a$，$x = b$ で囲まれた部分の面積を表しています．

グラフで表すと分かりやすいでしょう．



$y = x^2-4$ のグラフ　$y = |\,x^2-4\,|$ のグラフ

そういうことか〜

ナルホド〜

x 軸よりも下部の積分の値は負になるので，$y = x^2-4$ のグラフをみれば，x 軸より下部のほうが上部よりも大きいので，結果的に定積分の値は負の数になるのです．

一方，$y = |\,x^2-4\,|$ のグラフは x 軸よりも上部にあるので，定積分の値は右図の斜線部の面積を表しています．

このように，グラフをイメージすることが大切です．

▷Point◁

> 絶対値のついた関数の積分は，まずはグラフのイメージをすること．
> 特に，$y = |\,f(x)\,|$ のグラフは，$y = f(x)$ のグラフの x 軸よりも下の部分を上に折りあげたものである．

考え方　$y = |\,f(x)\,|$ のグラフは，

$f(x) \geqq 0$ のとき (つまり，$f(x) \geqq 0$ をみたす x のとき)，$y = f(x)$．

$f(x) < 0$ のとき (つまり，$f(x) < 0$ をみたす x のとき)，$y = -f(x)$．

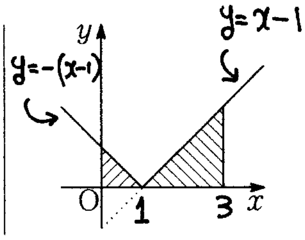
となるからです．

これで基本の確認はおわりでへす

OK

例題 $\displaystyle\int_0^3 |\,x-1\,|\ dx$

解 求める定積分の値は右図の斜線部分の面積を表している.



$$\int_0^3 |\,x-1\,|\ dx$$
$$=\int_0^1 -(x-1)\,dx+\int_1^3 (x-1)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

これはわかりやすい

■

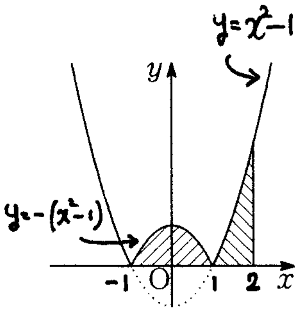
注 最初から面積になることを宣言したのなら，積分計算などせずにそのまま直角三角形の面積を求めてもよいでしょう．つまり

$$\int_0^3 |\,x-1\,|\ dx=1\times1\times\frac{1}{2}+2\times2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

で大丈夫です．直線の場合はいちいち積分せずに三角形の面積をどんどん利用しよう．　はーい

例題 $\displaystyle\int_{-1}^2 |\,x^2-1\,|\ dx$

解 求める定積分の値は右図の斜線部分の面積を表している.



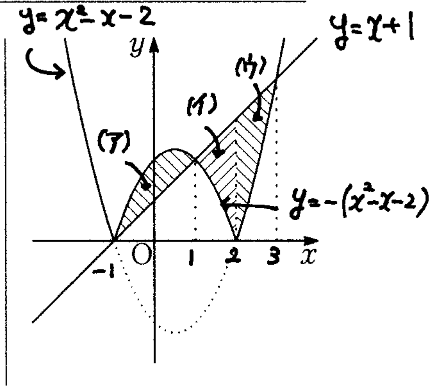
$$\int_{-1}^2 |\,x^2-1\,|\ dx$$
$$=\int_{-1}^1 -(x^2-1)\,dx+\int_1^2 (x^2-1)\,dx$$
$$=\underbrace{\frac{1}{6}(1+1)^3}_{}+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

公式を使いました。

■

例題 $y=|\,x^2-x-2\,|$ と $y=x+1$ で囲まれた部分の面積

考え方 交点は各自で求めてください．3 つの部分に分けて計算する必要があります．(ア) の部分だけ公式が使えますが，(イ)(ウ) は正直に計算するしかありません．



解
$$S=\int_{-1}^1\{(-x^2+x+2)-(x+1)\}\,dx \quad \text{(ア)の面積}$$
$$+\int_1^2\{(x+1)-(-x^2+x+2)\}\,dx \quad \text{(イ)の面積}$$
$$+\int_2^3\{(x+1)-(x^2-x-2)\}\,dx \quad \text{(ウ)の面積}$$
$$=\frac{1}{6}(1+1)^3+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{13}{3}$$

この計算はキツイなー

いやーん

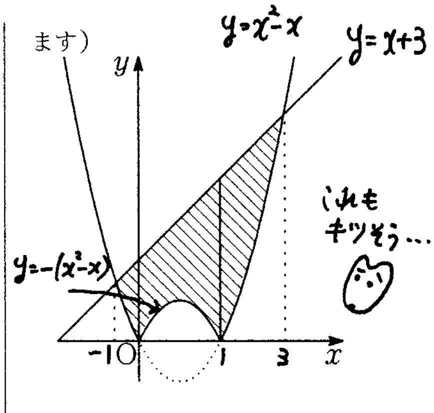
公式を使いました

■

例題 $y=|\,x^2-x\,|$ と $y=x+3$ で囲まれた部分の面積

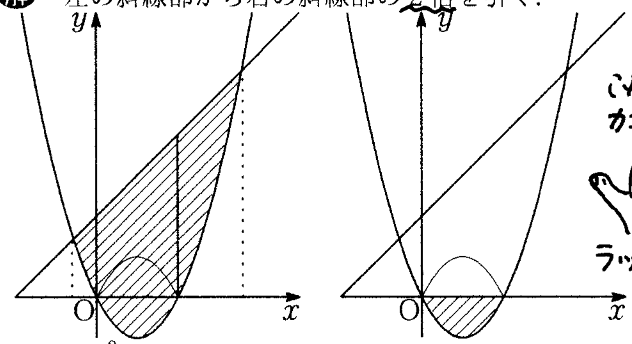
考え方 交点は各自で求めてください．先ほどと同様に 3 つの部分に分けて計算を ……と思ってしまいますが，今度はその必要はありません．

(**注** 見やすくするため目盛の幅は変えてあります)



これもキツそう…

解 左の斜線部から右の斜線部の 2 倍を引く．



これはカンターン

ラッキ〜

$$S=\int_{-1}^3\{(x+3)-(x^2-x)\}\,dx$$
$$-2\int_0^1(-x^2+x)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(3+1)^3-2\cdot\frac{1}{6}(1-0)^3=\frac{31}{3}$$

どっちも公式が使えましたよ

お見事!!

■

2　応用問題

がんばろう　うん

ここからが入試頻出の重要問題です．いろんな文字が出てきて混乱しますが，「何の文字について積分するのか」を常に意識することが大切です．

> **例題**　$\displaystyle\int_0^x t\,|\,t-1\,|\ dt$

考え方　まずは，t の関数を t で積分していることに注目しよう．よって，関数のグラフを図示する際も t についての関数とみて（横軸は t）書きます．その関数を 0 から x まで積分するわけです．

$y=t\,|\,t-1\,|$ のグラフ

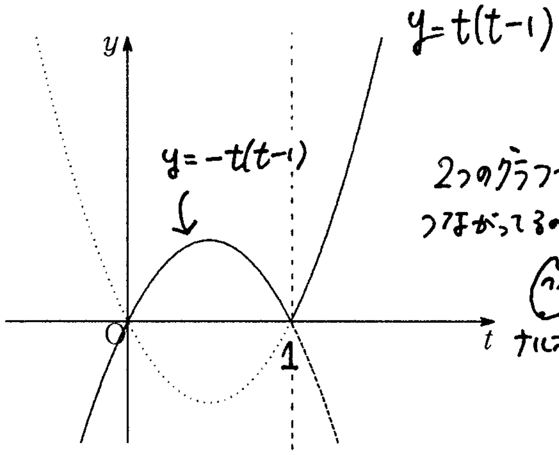
今回の場合，関数全体に絶対値がついているわけではないので，「x 軸より下部を折り返し」という手法は使えません．セオリー通り，絶対値の中身の正負で場合分けして，絶対値を外します．

$$t\,|\,t-1\,|=\begin{cases}-t(t-1) & (t\leqq 1)\\ t(t-1) & (t>1)\end{cases}$$

これはわかる　OK

つまり，$t\leqq 1$ の範囲では $y=-t(t-1)$ のグラフ，$t>1$ の範囲では $y=t(t-1)$ のグラフを使え，と言っているわけです．

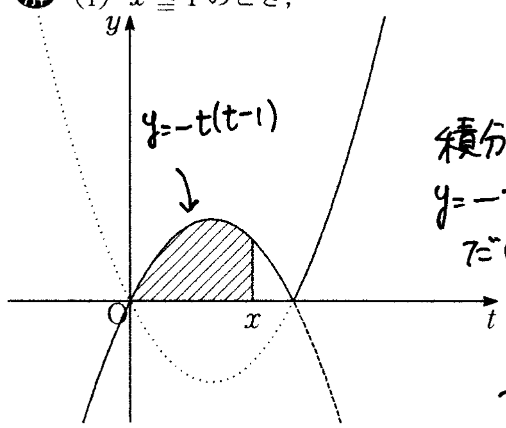
よって，グラフは以下の通り．



2つのグラフがつながってるのネ　ナルホドー

このグラフを 0 から x まで積分するのですが，x がどこにあるのか（つまり，x が 1 より大か小か）で積分計算が変わってくることに気づくでしょう．よって，x で場合分けする必要があります．

解　(i)　$x\leqq 1$ のとき，

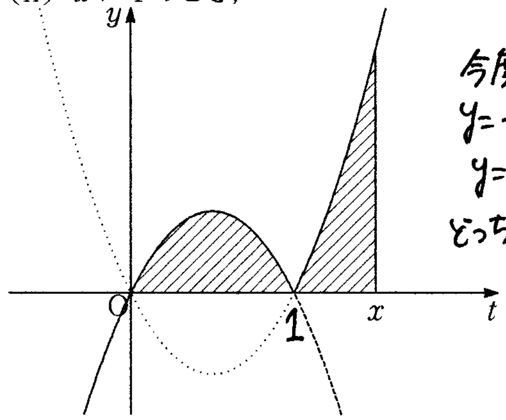


積分するのは $y=-t(t-1)$ だけです　やったー

求める定積分の値は図の斜線部分の面積になるので，

$$\begin{aligned}\int_0^x t\,|\,t-1\,|\ dt&=\int_0^x -t(t-1)\,dt\\&=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^x\\&=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

(ii)　$x>1$ のとき，



今度は $y=-t(t-1)$ と $y=t(t-1)$ どっちも積分します　うーん

求める定積分の値は図の斜線部分の面積になるので，

$$\begin{aligned}&\int_0^x t\,|\,t-1\,|\ dt\\&=\int_0^1 -t(t-1)\,dt+\int_1^x t(t-1)\,dt\\&=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_1^x\\&=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

計算自体は大したことないネ　ラッキ〜

よって，(i)(ii) より，

$$\int_0^x t\,|\,t-1\,|\ dt=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2 & (x\leqq 1)\\[2mm] \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3} & (x>1)\end{cases}$$

■

最終的に x の式になるんですね．　まあ当たり前やな…

例題　$\displaystyle\int_0^1 |\,x^2-2tx\,|\ dx$

さっきとにてる…

考え方　今度は，x の関数を x で積分します．関数全体に絶対値がついているので「x 軸より下部を折り返し」という手法が使えますし，積分区間も 0 から 1 までなので，一見ラクそうですが・・・

まずはグラフを書いてみましょう．

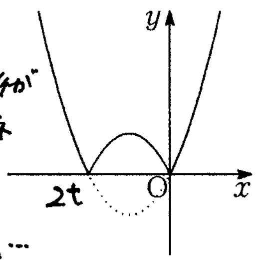
ラクでしょ?

$y=|\,x^2-2tx\,|$ のグラフ

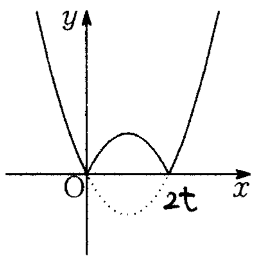
$y=x^2-2tx$ のグラフの x 軸より下部を折り上げたものです．

$y=x^2-2tx=x(x-2t)$ なので，x 軸と 0, $2t$ で交わりますが，$2t$ の正負 (つまり t の正負) によってグラフが変わってきます．

$t<0$ のとき



$t \geqq 0$ のとき



グラフの形がかわるのネ

イヤな予感…

この関数を 0 から 1 まで積分すればよいのですが，$t<0$ の場合は (左図)，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲の関数は確定するのに対し，$t \geqq 0$ の場合は (右図)，1 がどこにあるのか (つまり，$2t$ が 1 より大か小か) で積分計算が変わってくることに気づくでしょう．t で場合分けする必要があります．

やっぱり〜

つまり，

$$2t<1 \iff t<\frac{1}{2}$$

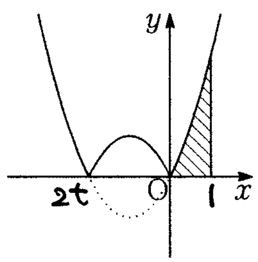
$$1 \leqq 2t \iff \frac{1}{2} \leqq t$$

という場合分けになるでしょう．なお，$t \geqq 0$ であることが前提となるので，注意しましょう。

解

(i) $t<0$ のとき．

求める定積分の値は図の斜線部分の面積を表しているから，

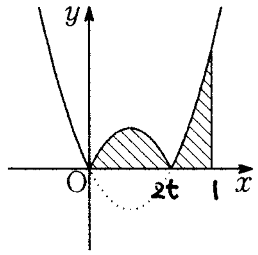


これは計算はラクそう…

$$\int_0^1 |\,x^2-2tx\,|\ dx=\int_0^1 (x^2-2tx)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-t$$

(ii) $0 \leqq t < \dfrac{1}{2}$ のとき，

求める定積分の値は図の斜線部分の面積を表しているから，



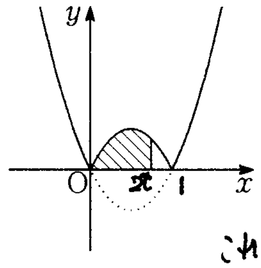
おちついて計算しよう

$$\int_0^1 |\,x^2-2tx\,|\ dx$$
$$=\int_0^{2t} -(x^2-2tx)\,dx+\int_{2t}^1 (x^2-2tx)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+tx^2\right]_0^{2t}+\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2\right]_{2t}^1$$
$$=\frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3}$$

ミスりそう

(iii) $\dfrac{1}{2} \leqq t$ のとき，

求める定積分の値は図の斜線部分の面積を表しているから，



これも楽やな〜

$$\int_0^1 |\,x^2-2tx\,|\ dx=\int_0^x -(x^2-2tx)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+tx^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{3}+t$$

よって，(i)(ii)(iii) より，

$$\int_0^1 |\,x^2-2tx\,|\ dx=\begin{cases}\dfrac{1}{3}-t & (t<0)\\[2mm] \dfrac{8}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3} & \left(0 \leqq t<\dfrac{1}{2}\right)\\[2mm] -\dfrac{1}{3}+t & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t\right)\end{cases}$$

■

今度は最終的にtの式になるんですね…

ややこしや〜