1990 年前期

直角三角形の 3 辺の長さがすべて整数のとき，面積は 2 の整数倍であることを示せ.

考え方　直角を挟む 2 辺を a，b とすれば $S=\dfrac{1}{2}ab$ なので，これが 2 の整数倍になるには ab が 4 の倍数にならねばなりません.

つまり，a，b が共に偶数になるか，どちらか一方が 4 の倍数になれば良いのです.

となれば，「偶奇性」や「4 で割った余り」を考えることになりますが，この問題はそれだけでは無理です.「2 で割った余り」や「4 で割った余り」で解決しないとなると，次に考えるのは何で割った余りでしょうか.

解　直角三角形の 3 辺を a，b，c とし，c を斜辺とする.

このとき，三角形の面積 S は $S=\dfrac{1}{2}ab$ となる．面積が 2 の整数倍であることを示すには，ab が 4 の倍数になることを示せばよい.

まず，平方数を 4 で割った余りは 0 か 1 であることを示す.

n を偶数とするとき，$n=2k$ とおけ

$$n^2=(2k)^2=4k^2$$

n を奇数とするとき，$n=2k+1$ とおけ

$$\begin{aligned}n^2&=(2k+1)^2\\&=4k^2+4k+1\\&=4k(k+1)+1\end{aligned}$$

よって，偶数の 2 乗を 4 で割った余りは 0，奇数の 2 乗を 4 で割った余りは 1 である．また，$k(k+1)$ は連続する 2 整数の積なので偶数．つまり，$4k(k+1)$ は 8 の倍数であるので，奇数の 2 乗を 8 で割った余りが 1 であることも注意しておく.

さて，$a^2+b^2=c^2$ より，a，b が共に奇数になることはない.

なぜならば，a も b も奇数ならば，a^2 も b^2 も 4 で割ると 1 余るので，a^2+b^2 は 4 で割ると 2 余る．平方数を 4 で割った余りは 0 か 1 なので $a^2+b^2 \neq c^2$ となり矛盾する.

よって，a と b は共に偶数か，一方が偶数で他方が奇数.

(i)　a，b が共に偶数のとき.

ab は 4 の倍数になるので $S=\dfrac{1}{2}ab$ は 2 の整数倍である.

(ii)　a，b のうち，一方は偶数で，他方は奇数のとき.

a を偶数，b を奇数として一般性を失わない．このとき，c も奇数となる.

$a=2m$ とおくと，$a^2+b^2=c^2$ より

$$4m^2=c^2-b^2$$

b と c は奇数なので，b^2 も c^2 も 8 で割ると 1 余る．つまり，c^2-b^2 は 8 で割り切れるので，$4m^2$ は 8 の倍数である.

したがって，m は偶数でなければならない.

つまり，a は 4 の倍数になる.

よって，ab は 4 の倍数になるので $S=\dfrac{1}{2}ab$ は 2 の整数倍である.

(i)(ii) より，直角三角形の 3 辺の長さがすべて整数のとき，面積は 2 の整数倍であることが証明された.

■

注　(ii) の部分について．a が 4 の倍数であることの別証明を紹介します．a が偶数だが 4 の倍数でない，つまり，$a=4k+2$ とおいて矛盾を示します．このとき，$a^2=(4k+2)^2=16k^2+16k+4$ となるので，a^2 は 8 で割ると 4 余ります.

また，b と c は共に奇数なので，b^2 と c^2 を 8 で割った余りは 1.

よって，a^2+b^2 を 8 で割った余りが 5，c^2 を 8 で割った余りが 1 だから，$a^2+b^2 \neq c^2$ となり矛盾です.

▷Point◁

偶数の 2 乗を 4 で割った余りは 0

奇数の 2 乗を 4 で割った余りは 1

奇数の 2 乗を 8 で割った余りも 1