1991 年後期

x は 0 でない実数とする．

(1) $x+\dfrac{1}{x}$ が整数ならばすべての正の整数 n に対して $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ も整数であることを示せ．

(2) $x-\dfrac{1}{x}$ が 0 以外の整数ならば $x^2-\dfrac{1}{x^2}$ は整数でないことを示せ．

考え方 (1) は数学的帰納法の定番問題です．

$$a^{k+1}+b^{k+1}=(a+b)(a^k+b^k)-ab(a^{k-1}+b^{k-1})$$

という有名式を利用します．いわゆる，$n=k+1$ のときを示すのに，$n=k$ と $n=k-1$ の両方を仮定する必要があるというタイプです．

(2) は，$x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ で，$x-\dfrac{1}{x}$ が 0 以外の整数なので，$x+\dfrac{1}{x}$ がどのような状態になっているのかを探ります．単純に「$x+\dfrac{1}{x}$ が整数にならなければよい」と考えてはいけません．整数 a と有理数 $x+\dfrac{1}{x}$ が約分できて整数になる可能性があるからです．

解

(1) すべての正の整数 n に対して $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ が整数であることを数学的帰納法で示す．

[I] $n=1,\ 2$ のとき

$n=1$ のときは，$x+\dfrac{1}{x}$ が整数なので成立．

$n=2$ のときは，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$ で，$x+\dfrac{1}{x}$ が整数なので成立．

つまり，$n=1,\ 2$ のとき成立する．

[II] $n=k,\ k+1$ のとき成立すると仮定すると

$x^k+\dfrac{1}{x^k}$ と $x^{k+1}+\dfrac{1}{x^{k+1}}$ は共に整数である．このとき，

$$x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right)-\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)$$

であるので，$x^{k+2}+\dfrac{1}{x^{k+2}}$ も整数である．

すなわち，$n=k+2$ のときも成立する．

[I][II] より，すべての正の整数 n に対して $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ が整数になる．

(2) $x-\dfrac{1}{x}=a$ (a は 0 以外の整数) とおく．

$$x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=a\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=a^2+4$$

ここで，a^2+4 が平方数であると仮定すると，

$$a^2+4=b^2 \quad (b \text{ は正の整数})$$
$$(b+a)(b-a)=4$$

$(b+a)+(b-a)=2b$ (正の偶数) であるので，$b+a$ と $b-a$ の偶奇性は一致する．したがって，

$$(b+a,\ b-a)=(2,\ 2)$$

の場合しかない．このとき，$a=0,\ b=4$ となるが，$a\neq 0$ より不適．

したがって，a^2+4 は平方数ではないので，$x+\dfrac{1}{x}$ は無理数であり，$a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ が整数になることはない．

よって，$x^2-\dfrac{1}{x^2}$ は整数でない．

■

注 a^2+4 が平方数にならないことは次のようにも証明できます．なお，$a<0$ の可能性もあるので (どうせ 2 乗するので問題ないのですが)，$a^2+4=|a|^2+4$ としておきます．

$|a|=1$ のとき，$|a|^2+4=5$ なので平方数でない．

$|a|\geqq 2$ のとき

$(|a|+1)^2-(|a|^2+4)=2|a|-3>0$．よって，

$$|a|^2<|a|^2+4<(|a|+1)^2$$

が成立する．つまり，$|a|^2+4$ は連続する 2 つの平方数の間に存在することになるので，$|a|^2+4$ が平方数になることはない．

注 結局，(1) と (2) は何の関係もなかったです．