1992 年前期

n を正の整数とする．

(1) n^2 と $2n+1$ は互いに素であることを示せ．
(2) n^2+2 が $2n+1$ の倍数になる n を求めよ．

考え方　「互いに素」の証明方法は 2 通りあります．

▷Point◁ (「互いに素」の証明方法)

・「互いに素でない」と仮定して矛盾を示す (背理法)
・ユークリッドの互除法を用いて，最大公約数が 1 であることを直接示す

せっかくなので，(1) は両方やってみます．

(2) は，n^2+2 が $2n+1$ で割り切れる，つまり $\dfrac{n^2+2}{2n+1}$ が整数になるような n を見つけることになります．

ところで，たいてい，(1) が (2) のヒントや誘導になっていることが多いのですが，今回はどうでしょうか．(2) を解くときに，(1) の結果や手法を使うでしょうか？ (✎注 参照)

解　(1)

背理法

n^2 と $2n+1$ は互いに素でないと仮定すると，共通の素因数 p が存在し

$$n^2 = p\alpha \quad \cdots ① \qquad 2n+1 = p\beta \quad \cdots ②$$

とおける (α，β は整数)

① より，p は素数なので，n が p で割り切れる．よって，$n = p\gamma$ (γ は整数) とおき，② に代入すると，

$$2p\gamma + 1 = p\beta$$
$$p(\beta - 2\gamma) = 1$$

p は素数なので矛盾する．

よって，n^2 と $2n+1$ は互いに素である．

ユークリッドの互除法

a と b の最大公約数を記号 $(a,\ b)$ で表す．

ユークリッドの互除法より，$2n+1 = n\times 2+1$ なので，

$$(2n+1,\ n) = (n,\ 1) = 1$$

したがって，$2n+1$ と n は互いに素である．

よって，n^2 と $2n+1$ は互いに素である．

(2) $(n^2+2)\div(2n+1)$ を実際にひっ算で計算すると，商が $\dfrac{1}{2}n-\dfrac{1}{4}$，余りが $\dfrac{9}{4}$ になるので，

$$\frac{n^2+2}{2n+1} = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{2n+1}$$

両辺を 4 倍して

$$\frac{4(n^2+2)}{2n+1} = 2n-1+\frac{9}{2n+1}$$

ここで，4 と $2n+1$ は互いに素であるので，

$$\frac{n^2+2}{2n+1}\text{が整数} \iff \frac{4(n^2+2)}{2n+1}\text{が整数}$$

したがって，求める条件は，$\dfrac{9}{2n+1}$ が整数になることである．

よって，n は正の整数なので，$2n+1 \geqq 3$ だから，

$$2n+1 = 3,\ 9$$
$$\therefore\ n = 1,\ 4$$

■

✎**注**　結局，(1) と (2) は全く関係ないのでしょうか．(2) が終わった後で考えると，無関係ではなさそうです．やってみましょう．

4 と $2n+1$ は互いに素であるので，

n^2 と $2n+1$ が互いに素 $\iff$ $4n^2$ と $2n+1$ が互いに素

ユークリッドの互除法より

$$4n^2 = (2n+1)(2n-1)+1$$

なので，

$$(4n^2,\ 2n+1) = (2n+1,\ 1) = 1$$

したがって，$4n^2$ と $2n+1$ は互いに素である．

つまり，n^2 と $2n+1$ は互いに素である．