1993 年後期

m, n を正の整数とする．x についての 2 次方程式 $12x^2 - mx + n = 0$ の 2 つの実数解を小数第 2 位で四捨五入して 0.3 および 0.7 を得た．m, n を求めよ．

考え方　小数第 2 位で四捨五入して 0.3 および 0.7 ということは，2 つの解 α, β ($\alpha < \beta$) が

$$0.25 \leqq \alpha < 0.35 \quad \text{かつ} \quad 0.65 \leqq \beta < 0.75$$

このように不等式の形で表記されます．ということは，α, β と m, n の関係から，m と n の不等式にもっていければ何とかなりそうです．ここで最初に思いつくのが，解と係数の関係でしょう．

$$\alpha + \beta = \frac{m}{12} \qquad \alpha\beta = \frac{n}{12}$$

であり，先ほどの不等式から

$$0.9 \leqq \alpha + \beta < 1.1 \qquad 0.1625 \leqq \alpha\beta < 0.2625$$

なので，m と n をそれぞれ (別々に) 絞り込むことは可能です．しかし，m と n の関係が分からないので，絞り込んだ m と n がどう組み合わされるのかが不明です．この部分をどう処理するのか，がポイントでしょう．ひょっとすると，

$$0.25 \leqq \frac{m - \sqrt{m^2 - 48n}}{24} < 0.35$$

$$0.65 \leqq \frac{m + \sqrt{m^2 - 48n}}{24} < 0.75$$

を考えるかもしれませんが，ルートの不等式はできるだけ避けた方が無難なので，やめた方がいいです．となれば・・・・

解　$f(x) = 12x^2 - mx + n$ とおく．

$f(x) = 0$ の 2 つの解を 2 つの解 α, β ($\alpha < \beta$) とおくと，

$$0.25 \leqq \alpha < 0.35 \quad \text{かつ} \quad 0.65 \leqq \beta < 0.75$$

よって，

$$0.9 \leqq \alpha + \beta < 1.1$$

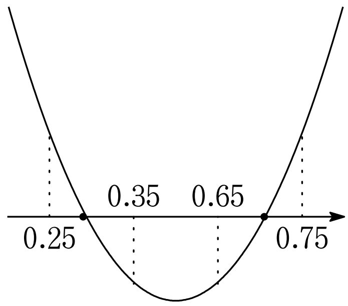
解と係数の関係より，$\alpha + \beta = \dfrac{m}{12}$ なので，

$$0.9 \leqq \frac{m}{12} < 1.1$$

$$10.8 \leqq m < 13.2$$

したがって，$m = 11$, 12, 13

ところで，$y = f(x)$ のグラフの概形は以下のようになるので，



$$f(0.25) = 12(0.25)^2 - 0.25m + n \geqq 0 \quad \cdots①$$

$$f(0.35) = 12(0.35)^2 - 0.35m + n < 0 \quad \cdots②$$

$$f(0.65) = 12(0.65)^2 - 0.65m + n \leqq 0 \quad \cdots③$$

$$f(0.75) = 12(0.75)^2 - 0.75m + n > 0 \quad \cdots④$$

①，② より

$$0.25(m - 3) \leqq n < 0.35(m - 4.2) \quad \cdots⑤$$

③，④ より

$$0.75(m - 9) < n \leqq 0.65(m - 7.8) \quad \cdots⑥$$

(i)　$m = 11$ のとき
⑤ より，$2 \leqq n < 2.38$
⑥ より，$1.5 < n \leqq 2.08$
これらを満たす n は，$n = 2$

(ii)　$m = 12$ のとき
⑤ より，$2.25 \leqq n < 2.73$
これを満たす n は存在しない．

(iii)　$m = 13$ のとき
⑥ より，$3 < n \leqq 3.38$
これを満たす n は存在しない．

(i)(ii)(iii) より，$n = 2$

■

注　全く面白くない問題でした．