1994 年前期

(1) 実数 $x$, $y$ が等式

$$x^2-2xy+y^2-x-y=0 \quad \cdots ①$$

をみたし，$x-y$ が整数ならば，$x$ も $y$ は整数であることを示せ．

(2) 等式 ① をみたす格子点 $(x,\ y)$ のうちで，点 $(100,\ 100)$ に最も近いものを求めよ．ただし格子点とは，$x$ 座標，$y$ 座標がともに整数であるような座標平面上の点のことである．

**考え方**　式 ① をパッと見て「因数分解できるやん」って思いませんでしたか？僕は思いました (笑)．でも，できませんね．式変形をすると $x-y$ が整数ならば $x+y$ も整数であることが分かります．このことがヒントになります．

(2) は単純に考えると，$(x,\ y)$ を格子点とすると，$x-y$ は整数になるので，(1) の結果が使えます．つまり，$x-y=m$ として，

$$(x,\ y)=\left(\frac{m(m+1)}{2},\ \frac{m(m-1)}{2}\right)$$

で，点 $(100,\ 100)$ に最も近くなる $m$ を求めれば良いのです．$m$ にいろいろ代入して実験してみると，

$m=13$ のとき，$(x,\ y)=(91,\ 78)$

$m=14$ のとき，$(x,\ y)=(105,\ 91)$

$m=15$ のとき，$(x,\ y)=(120,\ 105)$

などとなるので，どう考えても，$(x,\ y)=(105,\ 91)$ が一番近そうです．しかし，これは予想にすぎず，きちんと実証する必要があります．さらに，おっと，$m$ は負の整数の可能性もありましたね．

**解**　(1)

$$x^2-2xy+y^2-x-y=0$$

$$(x-y)^2=x+y$$

$x-y=m$ （$m$ は整数）とおくと，$x+y=m^2$ なので，

$$x=\frac{m(m+1)}{2},\qquad y=\frac{m(m-1)}{2}$$

$m(m+1)$，$m(m-2)$ は連続する 2 整数の積なので偶数である．

よって，$x$ と $y$ は整数である．

(2)　等式 ① をみたす格子点 $(x,\ y)$ は，(1) より

$$(x,\ y)=\left(\frac{m(m+1)}{2},\ \frac{m(m-1)}{2}\right)$$

と表される．このとき，点 $(100,\ 100)$ との距離を $d$ とすると

$$\begin{aligned}
d^2&=\left(\frac{m(m+1)}{2}-100\right)^2+\left(\frac{m(m-1)}{2}-100\right)^2\\
&=\frac{m^2(m+1)^2}{4}-100m(m+1)+100^2\\
&\qquad+\frac{m^2(m-1)^2}{4}-100m(m-1)+100^2\\
&=\frac{m^2(m^2+1)}{2}-200m^2+2\cdot 100^2\\
&=\frac{1}{2}m^4-\frac{399}{2}m^2+2\cdot 100^2\\
&=\frac{1}{2}\left(m^2-\frac{399}{2}\right)^2-\frac{399^2}{8}+2\cdot 100^2
\end{aligned}$$

したがって，$m^2=\dfrac{399}{2}=199.5$ に最も近い整数 $m$ で距離 $d$ は最小になる．

$14^2=196$，$15^2=225$ なので，$m=\pm 14$ である．

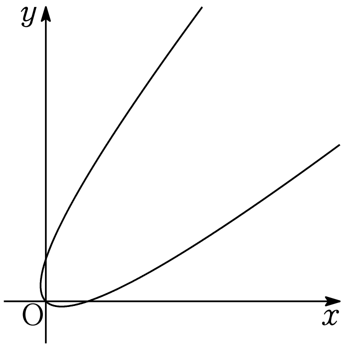
よって，

$m=14$ のとき，$(x,\ y)=(105,\ 91)$

$m=-14$ のとき，$(x,\ y)=(91,\ 105)$

■

**参考** 式 ① を図示すると以下のようになります.




放物線をナナメ 45 度回転させたみたいですね. このグラフは数学 Ⅲ の範囲ですので気にしないでください.