1996 年前期

(1) 2 つの自然数の組 $(a,\ b)$ は，条件

$$a < b \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{4}$$

を満たす．このような組 $(a,\ b)$ のうち，b の最も小さいものをすべて求めよ．

(2) 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ は，条件

$$a < b < c \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3}$$

を満たす．このような組 $(a,\ b,\ c)$ のうち，c の最も小さいものをすべて求めよ．

考え方　文字の対称性から，不等式を自分で作って，範囲を絞り込む定番の手法です．今回は条件を満たす組を全て求めるのではなく，(1) なら b，(2) なら c が最も小さいものを求めるだけなので，「完璧に」絞り込む必要はありません．しかしながら，ある意味「しらみつぶし」的に細かく調べていく必要があり，そういう点では，思考力よりも作業的な問題といえ，残念ながら数学的な問題ではありません．

解

(1)　$a < b$ より，$\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{b} < \frac{1}{4} \qquad \therefore\ b > 8$$

したがって，$b = 9$ から順番に調べていくことにする．

まず，$b = 9$ のとき，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{9} < \frac{1}{4} \qquad \therefore\ a > \frac{36}{5} = 7.2$$

よって

$$7.2 < a < 9$$

なので，この不等式をみたす整数 a は，$a = 8$.

a が確かに存在するので，b の最も小さいものは $b = 9$ であり，このとき

$$(a,\ b) = (8,\ 9)$$

となる．

(2)

$a < b < c$ より，$\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{c} < \frac{1}{3} \qquad \therefore\ c > 9$$

したがって，$c = 10$ から順番に調べていくことにする．

(i) $c = 10$ のとき，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{10} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{7}{30}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{7}{30}$$

$$\frac{2}{b} < \frac{7}{30} \qquad \therefore\ b > \frac{60}{7} = 8.57\cdots$$

よって

$$8.57\cdots < b < 10$$

なので，この不等式をみたす整数 b は，$b = 9$.

このとき，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{a} < \frac{11}{90} \qquad \therefore\ a > \frac{90}{11} = 8.18\cdots$$

よって

$$8.18\cdots < a < 9$$

なので，この不等式をみたす整数 a は存在しない．

(ii) $c=11$ のとき,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{11}<\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{8}{33}$$
$$\frac{1}{b}+\frac{1}{b}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{8}{33}$$
$$\frac{2}{b}<\frac{8}{33} \qquad \therefore\ b>\frac{33}{4}=8.25$$

よって

$$8.25\cdots<b<11$$

なので, この不等式をみたす整数 b は, $b=9,\ 10$.

$b=9$ のとき,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}<\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{a}<\frac{13}{99} \qquad \therefore\ a>\frac{99}{13}=7.61\cdots$$

よって

$$7.61\cdots<a<9$$

なので, この不等式をみたす整数 a は $a=8$ と存在する.

$b=10$ のとき,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}<\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{a}<\frac{47}{330} \qquad \therefore\ a>\frac{330}{47}=7.02\cdots$$

よって

$$7.02\cdots<a<10$$

なので, この不等式をみたす整数 a は $a=8,\ 9$ と存在する.

したがって, $c=11$ のとき

$$(a,\ b)=(8,\ 9),\ (8,\ 10),\ (9,\ 10)$$

(i)(ii) より, c の最も小さいものは $b=11$ であり, このとき

$$(a,\ b,\ c)=(8,\ 9,\ 11),\ (8,\ 10,\ 11),\ (9,\ 10,\ 11)$$

となる.

■