1997 年前期

すべての正の整数 n に対して $5^n + an + b$ が 16 の倍数となるような 16 以下の正の整数 a, b を求めよ.

考え方 すべての正の整数 n で 16 の倍数になるので，とりあえず，$n = 1$, 2, あたりを代入して考え始めるでしょう．この辺の様子を調べると，すぐに a と b が確定しますが，あくまでもこれは最初の数個からの予想に過ぎず，一般的でありません.

特定の場合で予想を立て (必要条件)，一般的な証明をする (十分条件) という手法はとても大切ですね.

解 $a_n = 5^n + an + b$ とおく.

すべての正の整数 n に対して a_n が 16 の倍数となるには，少なくとも，a_1 と a_2 が 16 の倍数でなければならない.

$$a_1 = 5 + a + b$$
$$a_2 = 25 + 2a + b$$

このとき，$a_2 - a_1 = 20 + a$ も 16 の倍数になる.

$1 \leqq a \leqq 16$ なる a で，$20 + a$ が 16 の倍数になるのは，$a = 12$ である.

このとき，$a_1 = 17 + b$ であり，$1 \leqq b \leqq 16$ なる b で，a_1 が 16 の倍数になるのは，$b = 15$ である.

このようにして定まった a, b のときに，すべての正の整数 n に対して a_n が 16 の倍数であることを，数学的帰納法で証明する.

$$a_n = 5^n + 12n + 15$$

[I] $n = 1$ のとき

$a_1 = 5 + 12 + 15 = 32$ となり 16 の倍数である.

よって，$n = 1$ のとき成立.

[II] $n = k$ のとき成立すると仮定すると

$a_k = 5^k + 12k + 15 = 16m$ (m は整数) とおける．このとき,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 5^{k+1} + 12(k+1) + 15 \\ &= 5 \cdot 5^k + 12k + 27 \\ &= 5(16m - 12k - 15) + 12k + 27 \\ &= 5 \cdot 16m - 60k - 75 + 12k + 27 \\ &= 5 \cdot 16m - 48k - 48 \\ &= 16(5m - 3k - 3) \end{aligned}$$

よって，a_{k+1} の 16 の倍数である.

つまり，$n = k + 1$ のときも成立する.

[I][II] より，すべての正の整数 n で a_n は 16 の倍数である.

以上の結果から，求める a, b は

$$a = 12, \quad b = 15$$

■

注 a_n が 16 の倍数であることを，数学的帰納法以外の方法で証明できるでしょうか.

ちょっと，やってみましょう.

$n = 1$ のときだけは最初に確認し，$n \geqq 2$ のときを考えます.

5^n の部分を 2 項定理で展開すると

$$\begin{aligned} a_n &= 5^n + 12n + 15 \\ &= (4+1)^n + 12n + 15 \\ &= \underline{4^n + {}_n\mathrm{C}_{n-1} 4^{n-1} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_2 4^2} + {}_n\mathrm{C}_1 4 + 1 + 12n + 15 \end{aligned}$$

ここで，式中の下線部分は 16 の倍数になっています (4^2 でくくれるから).

で，下線部分以外に注目すると

$$\begin{aligned} (\text{下線部以降}) &= {}_n\mathrm{C}_1 4 + 1 + 12n + 15 \\ &= 4n + 1 + 12n + 15 \\ &= 16n + 16 \end{aligned}$$

よって，a_n が 16 の倍数であることが証明できました.

やっぱりメンドウですね．数学的帰納法の方が断然スムーズです.

注 なぜ，面倒なのでしょうか．なんとなく分かると思いますが，それは，$16 = 2^4$ だからです.

もし仮に，15 の倍数であることを示すのなら，3 の倍数かつ 5 の倍数を示せば良いし，17 の倍数であることを示すのなら，17 は素数なので mod 17 で合同式の計算をすれば良い．しかし，16 の倍数の証明は，$16 = 2^4$ だから，どうしてもうまくいかないのです.