1998 年前期

正の整数 n を 8 で割った余りを $r(n)$ とおく．正の整数の組 $(a,\ b)$ は，条件

$$0 < a - r(a) < \frac{4}{3}r(b),$$

$$0 < b - r(b) < \frac{4}{3}r(ab)$$

を満たすとする．

(1) $a - r(a)$ と $r(b)$ を求めよ．
(2) a と b を求めよ．

考え方　抽象的な不等式で面食らうかもしれませんが，ポイントは「$r(n)$ は 0〜7 の整数にすぎないこと」と，「$n - r(n)$ が 8 の倍数であること」です．この 2 つを常に念頭においておこう．

合同式を効果的に使うと，計算が楽になります．

解

$$0 < a - r(a) < \frac{4}{3}r(b) \quad \cdots①$$

$$0 < b - r(b) < \frac{4}{3}r(ab) \quad \cdots②$$

(1) ① について考える．

$r(b)$ は 0〜7 の整数なので，$\frac{4}{3}r(b)$ のとり得る値は，

$$\frac{4}{3}r(b) = 0,\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{12}{3},\ \frac{16}{3},\ \frac{20}{3},\ \frac{24}{3},\ \frac{28}{3}$$

のいずれかである．

いま，$a - r(a)$ は 8 の倍数であるので，

$$0 < a - r(a) < \frac{4}{3}r(b),$$

を満たす 8 の倍数 $a - r(a)$ が存在する条件は

$$\frac{4}{3}r(b) > 8$$

したがって，$\frac{4}{3}r(b) = \frac{28}{3} > 8$ のとき，すなわち $r(b) = 7$ のときが適する．

このとき，$a - r(a) = 8$ である．

$$\therefore\ a - r(a) = 8, \quad r(b) = 7$$

(2) ② について考える．

$r(ab)$ は 0〜7 の整数なので，(1) と同様に考えて，

$$b - r(b) = 8, \quad r(ab) = 7$$

(1) の結果と合わせて

$$\begin{cases} a - r(a) = 8 \\ b - r(b) = 8 \\ r(b) = 7 \\ r(ab) = 7 \end{cases}$$

よって，$b = 8 + r(b) = 8 + 7 = 15$

次に，a を求めるために，$r(a)$ を求める．

$r(b) = 7$，$r(ab) = 7$ より，b も ab も 8 で割った余りは 7 である．つまり，

$$b \equiv 7 \pmod 8, \quad ab \equiv 7 \pmod 8$$

mod 8 の掛け算の表をつくると

a	0	1	2	3	4	5	6	7
b	7	7	7	7	7	7	7	7
ab	0	7	6	5	4	3	2	1

したがって，$ab \equiv 7 \pmod 8$ となるのは，$a \equiv 1 \pmod 8$ のときである．よって，

$$r(a) = 1$$

よって，$a = 8 + r(b) = 8 + 1 = 9$

$$a = 9, \quad b = 15$$

■

注　(2) では，結局 $r(a)$ の値を求めることがメインになります．ここでもやはり，$r(a)$ は 0〜7 の整数なので，すべての場合を検証して，$r(a) = 1$ を導いています．表などを利用すると見やすいし，分かりやすいですね．