2000 年前期

a, b, c, d を正の整数とする．複素数 $w=a+bi$, $z=c+di$ が

$$w^2z=1+18i$$

をみたす．a, b, c, d を求めよ．

考え方　複素数と整数の融合は珍しいですが，やってみれば単なる計算問題です．おそらく大半の人は，$w=a+bi$, $z=c+di$ を $w^2z=1+18i$ に代入して，実部と虚部を比較したと思いますが（✎注 参照）上手くいかないでしょう．となると，できることと言えば・・・・

解　$w^2z=1+18i$ の両辺の絶対値をとると

$$|w^2z|=|1+18i|$$

$$|w|^2|z|=\sqrt{1^2+18^2}$$

$w=a+bi$, $z=c+di$ より

$$|w|=\sqrt{a^2+b^2},\quad |z|=\sqrt{c^2+d^2}$$

を代入して

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{325}$$

$$(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)=5^2\times 13$$

$a^2+b^2 \geqq 2$, $c^2+d^2 \geqq 2$ なので

$$a^2+b^2=5,\quad c^2+d^2=13$$

したがって

$$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

$$(c,\ d)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$$

となるが，$(a,\ b)$ と $(c,\ d)$ をどのように組み合わせると条件に合うのか検証する．

(i) $w=1+2i$, $z=2+3i$ のとき

$$w^2z=(-3+4i)(2+3i)=-18-i$$

(ii) $w=1+2i$, $z=3+2i$ のとき

$$w^2z=(-3+4i)(3+2i)=-17+6i$$

(ii) $w=2+i$, $z=2+3i$ のとき

$$w^2z=(3+4i)(2+3i)=-6+17i$$

(iv) $w=2+i$, $z=3+2i$ のとき

$$w^2z=(3+4i)(3+2i)=1+18i$$

よって，題意に適するのは，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 3,\ 2)$$

■

✎注　上の解答で

$$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

$$(c,\ d)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$$

が出た時点で，「よって終了」としてはいけません．$(a,\ b)$ と $(c,\ d)$ の組み合わせを全部調べていますが，そうせねばならない理由は分かりますよね．必要十分条件ではないからです．

✎注　$w=a+bi$, $z=c+di$ を $w^2z=1+18i$ に代入して，実部と虚部を比較してみましょう．

$$(a+bi)^2(c+di)=(a^2-b^2+2abi)(c+di)$$
$$=(a^2-b^2)c-2abd+((a^2-b^2)d+2abc)i$$

$$(a^2-b^2)c-2abd=1$$

$$(a^2-b^2)d+2abc=18$$

これを満たす正の整数を決定するのはちょっと難しいですね．