2001 年後期

m を正の整数とする．m^3+3m^2+2m+6 はある正の整数の 3 乗である．m を求めよ．

考え方 何から手をつけて分からない場合は，m にいろんな整数を代入して計算してみるかと思います．運良く一つが見つかるかもしれませんが，見つけた整数以外にも存在するのかどうかを検証せねばなりません．また，式の形を見て，「3 乗の展開公式に似ている」と思った人は良い勘をしています．確かに，

$$m^3+3m^2+2m+6=(m+1)^3-m+5$$

なので，「おっ，$m=5$ で決まりやん」と思うかもしれません．しかし，これは，あくまでも恒等式 (任意の m で成立する式) であり．$m=5$ 以外に立方数にならないことを証明せねばなりません．

「もとの式が $(m+1)^3$ に近い・・・」という感覚がヒントになります．

なお，正の整数の 3 乗である数を「立方数」と言います (2 乗である数は「平方数」です)．

解 $a_m=m^3+3m^2+2m+6$ とおく．

$$a_m=(m+1)^3-m+5$$

まず，

$$a_1=2^3-1+5=12$$

$$a_2=3^3-2+5=30$$

$$a_3=4^3-3+5=66$$

$$a_4=5^3-4+5=126$$

はいずれも立方数でない．

$$a_5=6^3-5+5=6^3$$

は立方数．

$m\geqq 6$ のとき，

$$a_m=(m+1)^3-m+5<(m+1)^3$$

$a_m-m^3=3m^2+2m+6>0$ であるので，

$$m^3<a_m<(m+1)^2$$

つまり，$m\geqq 6$ のとき，a_m は 2 つの連続する立方数の間に存在するため，a_m が立方数になることはない．

よって，a_m が立方数になるのは，$m=5$ のときである．

■

注 次のような解答もあります．

$$(m+2)^3-a_m=6m^2+10m+2>0$$

なので，

$$m^3<a_m<(m+2)^3$$

よって，a_m が立方数になるとすれば，

$a_m=(m+1)^3$ の場合に限られる．

$m^3+3m^2+2m+6=(m+1)^3$ より，$m=5$ と求まります．

いずれにせよ，次のことがポイントです．

▷Point◁ (整数の離散性)

整数は幅 1 トビトビに存在する．
n を整数とするとき，
$n<a<n+1$ なる整数 a は存在しない．
$n<a<n+2$ なる整数 a は $a=n+1$．
平方数や立方数の場合も同様で
$n^2<a<(n+1)^2$ なる平方数 a は存在しない．
$n^2<a<(n+2)^2$ なる平方数 a は $a=(n+1)^2$．

参考 「$n\geqq 2$ のとき，n^2-n+1 が平方数にならないことを証明せよ」という問題も，整数の離散性を利用して証明できます．

$$(n^2-n+1)-(n-1)^2=n>0$$

$$n^2-(n^2-n+1)=n-1>0$$

$$\therefore\ (n-1)^2<n^2-n+1<n^2$$

よって，n^2-n+1 は 2 つの連続する平方数の間に存在するため，n^2-n+1 が平方数になることはない．