2002 年前期

k, x, y は正の整数とする．三角形の 3 辺の長さが $\dfrac{k}{x}$, $\dfrac{k}{y}$, $\dfrac{1}{xy}$, で周の長さが $\dfrac{25}{16}$ である．k, x, y を求めよ．

考え方 3 辺の長さとその和が与えられてるので，単純に考えれば

$$\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{1}{xy}=\frac{25}{16}$$

という式から，k, x, y を決定することになります．しかし，この式だけで決定するのは難しい (というか不可能) です．なぜなら，この式は，「3 つの数字の和が $\dfrac{25}{16}$ である」と言っているだけで，その 3 つの数字で本当に三角形ができるかどうかは別問題だからです．

となれば，必然的に，三角形の成立条件を考えることになります．三角形の成立条件から，なかなか凄いことが分かります．

解 3 辺の長さ $\dfrac{k}{x}$, $\dfrac{k}{y}$, $\dfrac{1}{xy}$, は x と y に関して対称性を持っているので $x \leqq y$ として一般性を失わない．つまり

$$\frac{k}{x} \geqq \frac{k}{y}$$

このとき，三角形の成立条件 (「2 辺の和は他の一辺より大きい」) より

$$\frac{k}{x}+\frac{k}{y}>\frac{1}{xy} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{k}{y}+\frac{1}{xy}>\frac{k}{x} \quad \cdots\cdots ②$$

$$\frac{1}{xy}+\frac{k}{x}>\frac{k}{y} \quad \cdots\cdots ③$$

$\dfrac{k}{x} \geqq \dfrac{k}{y}$ なので，このうち，③ は常に成立するから除外すると，①, ② より

$$\frac{k}{x}-\frac{k}{y}<\frac{1}{xy}<\frac{k}{x}+\frac{k}{y}$$

$$k(y-x)<1<k(x+y)$$

$k(x-y) \geqq 0$ なので，$k(x-y)=0$．よって，

$$x=y$$

したがって，3 辺の長さが $\dfrac{k}{x}, \dfrac{k}{x}, \dfrac{1}{x^2}$ となるので

$$\frac{2k}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{25}{16}$$

$$32kx+16=25x^2$$

$$x(25x-32k)=16$$

x は正の整数なので

x	1	2	4	8	16
$25x-32k$	16	8	4	2	1

$x=1$ のとき，$25-32k=16$．$k=\dfrac{9}{32}$

$x=2$ のとき，$50-32k=8$．$k=\dfrac{21}{16}$

$x=4$ のとき，$100-32k=4$．$k=3$

$x=8$ のとき，$200-32k=2$．$k=\dfrac{99}{16}$

$x=16$ のとき，$400-32k=1$．$k=\dfrac{399}{32}$

したがって，k が整数になるのは $x=4$ のときである．

$$k=3,\ x=y=4$$

■

注 x と $25x-32k$ の 5 通りの組み合わせを全て調べましたが，実は明らかに不適なものがあります．

$(25x-32k)-x=24x-32k=$ (偶数) なので，x と $25x-32k$ の偶奇性は一致します．したがって，(1, 16) と (16, 1) が不適であるのは明白ですね．

注 $32kx+16=25x^2$ から x と k を求める手法について．上の解答では，セオリー通り，積の形に変形して，すべての組み合わせを調べましたが，次のようにも考えることができます．

$$16(2kx+1)=25x^2$$

よって，(左辺) $=2^4\times$ (奇数) なので，左辺の素因数 2 の個数は 4 個．したがって，$x=2^2\times$ (奇数) となります．

$x=2^2m$（m は奇数）とおくと

$$2k(2^2m)+1=25m^2$$

$$m(25m-8k)=1$$

より，$m=1$，$25m-8k=1$．

よって，$k=3$，$x=4$ と確定します．

✐注　上の解答では，三角形の成立条件を 3 つ並列して考えましたが（この方が分かりやすいので），一般的には，三角形の成立条件は次のようにまとめたものを言います．なぜ，このような式にまとめられるのかは各自で考えてください．

▷Point◁

三角形の 3 辺の長さを a，b．c とするとき，三角形の成立条件は

$$|a-b|<c<a+b$$

である．

この関係を使えば，辺の大小など関係なく

$$\left|\frac{k}{x}-\frac{k}{y}\right|<\frac{1}{xy}<\frac{k}{x}+\frac{k}{y}$$

となり，ここから **解** と同様の結果が得られます．