2003 年前期

(1) 正の整数 n で n^3+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ.
(2) 正の整数 n で n^n+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ.

考え方 (1) は合同式で一発終了です (もちろん, $n=3k,\ 3k+1,\ 3k+2$) とおいてもできます.

(2) に注意が必要です. 合同式の規則は

$$a \equiv b \implies a^n \equiv b^n$$

は成立しますが

$$a \equiv b \implies a^a \equiv b^b$$

は成立しません.

例えば, $5 \equiv 2 \pmod 3$ ですが,
$5^5 \equiv 2 \pmod 3$
$2^2 \equiv 1 \pmod 3$
です. つまり, (2) で, (1) のやり方をそのまま適用して
$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき,
$n^n+1 \equiv 1^1+1 \pmod 3$.
$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき,
$n^n+1 \equiv 2^2+1 \pmod 3$.
などとしては絶対にいけません.

つまり, 指数の部分に合同式を適用してはダメだということです. 注意しましょう.

解

(1) 3 を法として考える.

(i) $n \equiv 0$ のとき

$$n^3+1 \equiv 1$$

∴ n^3+1 は 3 で割ると 1 余る.

(ii) $n \equiv 1$ のとき

$$n^3+1 \equiv 1^3+1 \equiv 2$$

∴ n^3+1 は 3 で割ると 2 余る.

(iii) $n \equiv 2$ のとき

$$n^3+1 \equiv 2^3+1 \equiv 9 \equiv 0$$

∴ n^3+1 は 3 で割り切れる.

したがって, n^3+1 が 3 で割り切れる n は, $n \equiv 2$, つまり, 3 で割ると 2 余る整数である.

(2) (1) 同様に, 3 を法として考える.

(i) $n=3k\ (k \geqq 1)$ のとき

$$n^n+1=(3k)^{3k}+1$$

$$(3k)^{3k}+1 \equiv 0^{3k}+1 \equiv 1$$

∴ n^n+1 は 3 で割ると 1 余る.

(i) $n=3k+1\ (k \geqq 0)$ のとき

$$n^n+1=(3k+1)^{3k+1}+1$$

$$(3k+1)^{3k+1}+1 \equiv 1^{3k+1}+1 \equiv 2$$

∴ n^n+1 は 3 で割ると 1 余る.

(iii) $n=3k+2\ (k \geqq 0)$ のとき

$$n^n+1=(3k+2)^{3k+2}+1$$

$$(3k+2)^{3k+2}+1 \equiv (-1)^{3k+2}+1$$

したがって, $3k+2$ が偶数のとき

$$(-1)^{3k+2}+1 \equiv 1+1 \equiv 2$$

∴ n^n+1 は 3 で割ると 2 余る.

したがって, $3k+2$ が奇数のとき

$$(-1)^{3k+2}+1 \equiv -1+1 \equiv 0$$

∴ n^n+1 は 3 で割り切れる.

よって, n^n+1 が 3 で割り切れるための n の条件は,「n が 3 で割ると 2 余る奇数」であり, すなわち,

6 で割ると 5 余る整数

である.

■

✐注　「3 で割ると 2 余る奇数」が「6 で割ると 5 余る整数」になる理由は分かりますか．まず，3 で割った余りと偶奇性に注目しているので，当然ながら 6 で割った余りで考えることになります．

n	3 で割った余り	2 で割った余り
$6k$	0	0
$6k+1$	1	1
$6k+2$	2	0
$6k+3$	0	1
$6k+4$	1	0
$6k+5$	2	1

この表を見れば，「3 で割ると 2 余る奇数」が「6 で割ると 5 余る整数」であることが分かると思います．