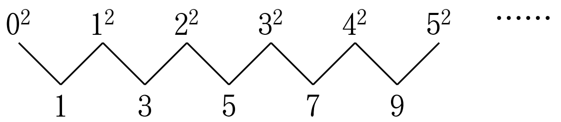
2004 年後期

(1) すべての正の奇数 k は，$m > n \geqq 0$ をみたす整数 m，n によって $k = m^2 - n^2$ と表されることを示せ．

(2) すべての正の偶数 k で，$m > n \geqq 0$ をみたす整数 m，n によって $k = m^2 - n^2$ と表されるものをすべて求めよ．

考え方 (1) は,「どんな奇数でも平方数の差で表すことができることを示せ」ということです．幼少期からの経験で，平方数の差が奇数になるのは知ってると思います．とりあえず，連続する平方数の差を順番に調べると，確かにすべての奇数が現れそうです．



しかし，連続する 2 つの平方数の差を計算して奇数になっていることを示しても，証明したことになりません．任意の奇数が作りだせることを示すのですから，あくまでも「任意の奇数を・・・と置くと」から答案は始まります．

(2) は，偶数の場合はどうか，つまり，どんな偶数でも平方数の差で作りだせるのか調べよということです．

いくつか実験してみると，

偶数 2 は作りだせそうにありませんが，

偶数 4 なら $4 = 2^2 - 0^2$ で作りだせます．

偶数 6 は作りだせそうにありませんが，

偶数 8 なら $8 = 3^2 - 1^2$ で作りだせます．

なんとなく規則性は分かりそうですが，どうやって示せばよいのでしょうか．

解

(1) 任意の正の奇数 k を $k = 2l + 1$ $(l \geqq 0)$ とおく．このとき，

$$m = l + 1,\ n = l$$

とすれば，$m > n \geqq 0$ であり，

$$m^2 - n^2 = (l+1)^2 - l^2 = 2l + 1 = k$$

となる．

したがって，全ての正の奇数 k は $m > n \geqq 0$ をみたす整数 m，n によって $k = m^2 - n^2$ と表される．

(2) 正の偶数 k で $m > n \geqq 0$ をみたす整数 m，n によって $k = m^2 - n^2$ と表されるものを考える．このとき，

$$k = (m+n)(m-n)$$

m と n の偶奇性が異なるとき，$m+n$ と $m-n$ はともに奇数になるので，$(m+n)(m-n)$ が偶数になることはない．したがって，m と n の偶奇性は一致し，$m+n$ と $m-n$ はともに偶数になるので，$k = (m+n)(m-n)$ は 4 の倍数である．

逆に，k が 4 の倍数のとき，$k = 4l$ $(l \geqq 1)$ とおく．このとき

$$m = l + 1,\ n = l - 1$$

とすれば，$m > n \geqq 0$ であり，

$$m^2 - n^2 = (l+1)^2 - (l-1)^2 = 4l = k$$

となる．

したがって，4 の倍数 k は必ず $m > n \geqq 0$ をみたす整数 m，n によって $k = m^2 - n^2$ と表される．

以上より，正の偶数 k で，条件を満たすものは，すべての 4 の倍数である．

■

注　この問題は論証重視です．「証明したつもり」でも，論理が間違っていればゼロ点の可能性があるので注意しましょう．