2004 年前期

a, b, c は整数で, $a < b < c$ をみたす．放物線 $y = x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$, $C(c,\ c^2)$ をとる．

(1) $\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ とはならないことを示せ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい．

(2) $a = -3$ のとき，$\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ となる組 $(b,\ c)$ をすべて求めよ．

考え方 (1) 高校数学における 2 直線のなす角の扱い方は,「tan の加法定理」か「ベクトルの内積」か「複素数平面における回転」(理系対象) に限られますが，今回は「tan の加法定理」を利用しましょう．

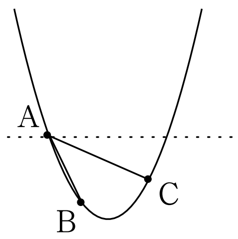
(2) は定番の整数問題なので，一橋大学志望者にとってはお手のものでしょう．

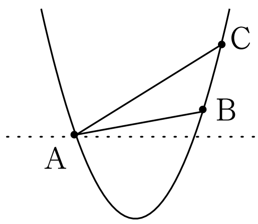
解

(1) 直線 AB, 直線 AC と x 軸の正方向とのなす角をそれぞれ α, β とし，$\angle\mathrm{BAC} = \gamma$ とする．

点 A を通り x 軸に平方な直線 L を考える．

(i) 2 点 B, C が L に対して同じ側にあるとき

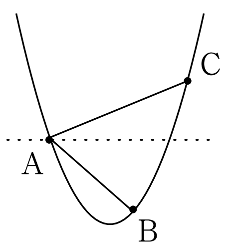




このとき，$\gamma = \beta - \alpha$ なので

$$\tan\gamma = \tan(\beta - \alpha)$$

(ii) 2 点 B, C が L に対して違う側にあるとき



このとき，$\gamma = (360^\circ - \alpha) + \beta = \beta - \alpha + 360^\circ$ なので

$$\tan\gamma = \tan(\beta - \alpha)$$

いずれの場合も，$\tan\gamma = \tan(\beta - \alpha)$ であり，$\gamma = 60^\circ$ より，$\tan(\beta - \alpha) = \sqrt{3}$ となる．

$$\tan\alpha = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a$$

$$\tan\beta = \frac{c^2 - a^2}{c - a} = c + a$$

$$\begin{aligned}\tan(\beta - \alpha) &= \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} \\ &= \frac{(c + a) - (b + a)}{1 + (c + a)(b + a)} \\ &= \frac{c - b}{1 + (c + a)(b + a)}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{c - b}{1 + (c + a)(b + a)} = \sqrt{3}$$

a, b, c は整数なので有理数．つまり，左辺は有理数である．$\sqrt{3}$ は無理数なので矛盾．

したがって，$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ とはならない．

(2) (1) で $\gamma = 45^\circ$, $a = -3$ の場合である．つまり，$\tan\gamma = 1$ なので,

$$\frac{c - b}{1 + (c - 3)(b - 3)} = 1$$

$$c - b = 1 + (c - 3)(b - 3)$$

$$bc - 2b - 4c + 10 = 0$$

$$(b - 4)(c - 2) = -2$$

b, c は整数なので,

$b-4$	-2	-1	1	2
$c-2$	1	2	-2	-1

よって,

b	2	3	5	6
c	3	4	0	1

この中で，$-3 < b < c$ を満たすものを選ぶと,

$$(b,\ c) = (2,\ 3),\ (3,\ 4)$$

■

✎注　問題文が「直線 AB と直線 AC のなす角が 60°」となっていれば，面倒な場合分けなどせずに

$$\left|\tan(\beta-\alpha)\right|=\tan 60^\circ$$

としますが，今回は $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ と指定されているので，きちんと場合分けしました．

参考　今回は「tan の加法定理」を用いましたが，他の解法ではどうでしょうか．やってみましょう．

ベクトルの内積の利用

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}b-a\\b^2-a^2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}c-a\\c^2-a^2\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos 60^\circ$ より

$$(b-a)(c-a)+(b^2-a^2)(c^2-a^2)$$
$$=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}\sqrt{(c-a)^2+(c^2-a^2)^2}\times\frac{1}{2}$$

$$2(b-a)(c-a)(1+(b+a)(c+a))$$
$$=(b-a)(c-a)\sqrt{1+(b+a)^2}\sqrt{1+(c+a)^2}$$

$$2(1+(b+a)(c+a))=\sqrt{1+(b+a)^2}\sqrt{1+(c+a)^2}$$

$b+a=A$, $c+a=B$ とおくと

$$4(AB+1)^2=(A^2+1)(B^2+1)$$

左辺が 4 の倍数なので，右辺も 4 の倍数である．平方数を 4 で割った余りは 0 か 1 なので，A も B も奇数でなけらばならない．

A も B も奇数の時，$AB+1$ は偶数であるので，左辺は 8 の倍数である．(奇数)^2 を 8 で割った余りは 1 なので，A^2+1 も B^2+1 も 8 で割った余りが 2，つまり，右辺を 8 で割った余りは 4 になるので矛盾．

✎注　4 や 8 で割った余りを考えるのは基本なので，この解法もできるようになっておこう．

結局，$\sqrt{3}$ の無理数は使いませんでしたね．

複素数平面の回転の利用

「△ABC が正三角形である」ときに回転を考えることは有効ですが，今回はそうではないのでやめておきましょう．