2005 年後期

(1) p，$2p+1$，$4p+1$ がいずれも素数であるような p をすべて求めよ．
(2) q，$2q+1$，$4q-1$，$6q-1$，$8q+1$ がいずれも素数であるような q をすべて求めよ．

考え方　京大，阪大，早稲田など，類題を上げたらキリがない定番問題です．「素数を求めよ」ということですが，大学院で素数や整数を研究していた私に言わせると，素数の秘密は世界中の数学者の頭脳を結集しても分からないことが多く，高校生の分際で素数を求めるなんておこがましいと言わざるを得ません．ということは，高校生のレベルで見つけられる素数なんて「すぐ近くに転がっている」はず．なので，とにかく実験して素数を見つけ，規則性を予測し証明する，という流れが基本です．

▷Point◁
＜素数に関する問題のアプローチ＞
実験して予想する．
その予想が正しいことを証明する

(1) をやってみます．とにかく実験して，予想．

p	$2p+1$	$4p+1$	
2	5	9	×
3	7	13	○
5	11	21	×
7	15	29	×
11	23	45	×
13	27	53	×

表を見ればわかるように，p，$2p+1$，$4p+1$ がいずれも素数であるような p は $p=3$ だけであるように思われます．逆に言えば，$p=3$ 以外の場合は，必ず素数以外の数が混じっているということ．その「素数以外の数」に共通する性質は何でしょうか．お分かりでしょう．必ず 3 の倍数になっています．つまり，この問題は，$p=3$ 以外の時，$2p+1$ か $4p+1$ のいずれか一方が必ず 3 の倍数になっていることを示せばよいのです．

(2) をやってみます．本当は自分でやって欲しいところですが，大サービスです．

q	$2q+1$	$4q-1$	$6q-1$	$8q+1$	
2	5	7	11	17	○
3	7	11	17	25	×
5	11	19	29	41	○
7	15	27	41	57	×
11	23	43	65	89	×
13	27	51	47	105	×

$q=2$，5 以外の場合は，必ず素数以外の数が混じっていますね．その「素数以外の数」に共通する性質を考えてください．

以下の解答では，これらの予想を元にした解答になっています．

解

(1)

$p=2$ のとき，$4p+1=9$ となり素数ではない．

$p=3$ のとき，$2p+1=5$，$4p+1=13$ となり，いずれも素数である．

$p>3$ のとき，3 より大きい素数は，

$$p=3k+1,\quad 3k+2 \ (k\text{ は自然数})$$

のいずれかである．

$p=3k+1$ のときは

$$2p+1=2(3k+1)+1=6k+3=3(k+1)$$

$k\geqq 1$ より，これは 3 より大きい 3 の倍数である．

$p=3k+2$ のときは

$$4p+1=4(3k+2)+1=12k+9=3(4k+3)$$

$k\geqq 1$ より，これは 3 より大きい 3 の倍数である．

したがって，$2p+1$ か $4p+1$ のいずれか一方が 3 より大きい 3 の倍数なので，素数にはならない．

よって，p，$2p+1$，$4p+1$ がいずれも素数であるような p は $p=3$ だけである．

(2)

$q=2$ のとき，$2q+1=5$，$4q-1=7$，$6q-1=11$，$8q+1=17$ となり，いずれも素数である．

$q=3$ のとき，$8q+1=25$ となり，素数ではない．

$q=5$ のとき，$2q+1=11$，$4q-1=19$，$6q-1=29$，$8q+1=41$ となり，いずれも素数である．

$q>5$ のとき，5 より大きい素数は，

$q=5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4$ (k は自然数)

のいずれかである．

$q=5k+1$ のときは

$$6q-1=6(5k+1)-1=30k+5=5(6k+1)$$

$k \geqq 1$ より，これは 5 より大きい 5 の倍数である．

$q=5k+2$ のときは

$$2q+1=2(5k+2)+1=10k+5=5(2k+1)$$

$k \geqq 1$ より，これは 5 より大きい 5 の倍数である．

$q=5k+3$ のときは

$$8q+1=8(5k+3)+1=40k+25=5(8k+5)$$

$k \geqq 1$ より，これは 5 より大きい 5 の倍数である．

$q=5k+4$ のときは

$$4q-1=4(5k+4)-1=20k+15=5(4k+3)$$

$k \geqq 1$ より，これは 5 より大きい 5 の倍数である．

したがって，$2q+1$，$4q-1$，$6q-1$，$8q+1$ のいずれかが 5 より大きい 5 の倍数なので，素数にはならない．

よって，q，$2q+1$，$4q-1$，$6q-1$，$8q+1$ がいずれも素数であるような q は，$q=2,\ 5$ である．

■

注 もちろん合同式でやっても構いません．