2005 年前期

k は整数であり，3 次方程式 $x^3-13x+k=0$ は 3 つの異なる整数解をもつ．k とこれらの整数解をすべて求めよ．

考え方　整数問題に限らず，3 次方程式の解の問題では，まずは因数分解できるかどうかがポイントで，因数分解できない場合，3 次関数のグラフを考えることになります．グラフを考察する際も，定数分離できるかどうかで手法が変わってきましたね．

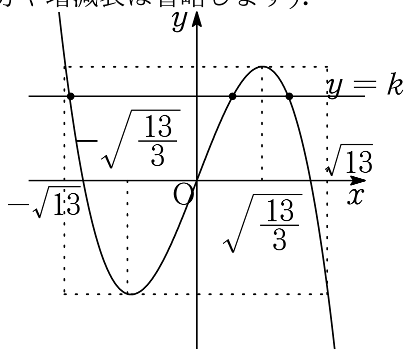
今回の場合，因数分解できませんが，定数分離できる形なので，グラフ考察でやってみます．

もちろん，整数問題ですから，グラフなどの解析的手法を用いなくても，解と係数の関係で解けるので，(別解) として紹介しておきます．

解　$x^3-13x+k=0$ より，$k=-x^3+13x$

3 次方程式 $x^3-13x+k=0$ の解は，2 つのグラフ $y=f(x)=-x^3+13x$ と $y=k$ との交点の x 座標である．

$y=f(x)=-x^3+13x$ のグラフ以下の通り (微分や増減表は省略します)．



$k=0$ のとき，$x=0,\ \pm\sqrt{13}$ なので，不適．

$k>0$ のとき，図より，一番大きい整数解 ($x=\alpha$ とする) は，$\sqrt{\frac{13}{3}}<\alpha<\sqrt{13}$.

$2<\sqrt{\frac{13}{3}}<3$，$3<\sqrt{13}<4$ なので，これを満たす整数 α は $\alpha=3$ である．

したがって，$x^3-13x+k=0$ は $x=3$ を解にもつので，代入して計算すると，$k=12$.

よって，$x^3-13x+12=0$ より

$(x-3)(x-1)(x+4)=0$ となり

3 つの整数解が $x=3,\ 1,\ -4$ と求まる．

$k<0$ のときは，$y=f(x)$ のグラフは原点対称であるので，$k>0$ の場合の結果の符号をそのまま入れ換えたものになる．つまり，$k=-12$ であり，3 つの整数解は $x=-3, -1,\ 4$ となる．

以上より，

$k=12$ のとき，$x=3,\ 1,\ -4$.

$k=-12$ のとき，$x=-3,\ -1,\ 4$.

■

解　(別解) 一部，略解です．

3 つの異なる整数解を α, β, γ $(\alpha>\beta>\gamma)$ とすると，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0 & \cdots\cdots① \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-13 & \cdots\cdots② \\ \alpha\beta\gamma=-k & \cdots\cdots③\end{cases}$$

まず，① より，$\alpha>0$ であり，$\gamma=-(\alpha+\beta)$ として ② に代入して整理すると

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=13$$

これを，β についての 2 次方程式とみて

$$\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2-13=0 \quad \cdots\cdots④$$

判別式 $D\geqq 0$ より，$\alpha^2-4(\alpha^2-13)\geqq 0$

$$\therefore\ \ 3\alpha^2-52\leqq 0$$

$\alpha>0$ より，$\alpha=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$\alpha=1$ のとき，④ より

$$\beta^2+\beta-12=0$$
$$(\beta+4)(\beta-3)=0$$

$1>\beta$ より，$\beta=-4$.

$\gamma=-(\alpha+\beta)$ より，$\gamma=-(1-4)=3$

これは，$\alpha>\beta>\gamma$ に適さない．

以下，同様にして，$\alpha=2,\ 3,\ 4$ の場合を全て調べると

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(3,\ 1,\ -4), (4,\ -1,\ -3)$$

と求まる．

$k=-\alpha\beta\gamma$ なので，k も求めることができる．

■