2006 年後期

正の整数 n に対して，$n = k + 2l$ をみたすような 0 以上の整数の組 $(k,\ l)$ の個数を a_n とする．また，$n = p + 2q + 3r$ をみたすような 0 以上の整数の組 $(p,\ q,\ r)$ の個数を b_n とする．

(1) a_n を n で表せ．

(2) n が 6 の倍数のとき，b_n を n で表せ．

考え方　整数問題というよりも数列の問題です．

(1) を具体的に書き出して考えてみよう．当然ながら l から順番に数字を入れて調べていくでしょう．

例えば $n = 10$ のとき，

$k + 2l = 10$ となる l は，$l = 0 \sim 5$ の 6 個．

例えば $n = 11$ のとき，

$k + 2l = 11$ となる l は，$n = 10$ の場合と同じく，$l = 0 \sim 5$ の 6 個．

例えば $n = 12$ のとき，

$k + 2l = 12$ となる l は，$l = 0 \sim 6$ の 7 個．

つまり，n が偶数か奇数かで状況が変わっていることに気づくと思います．

(2) は (1) の結果を利用します (ていうか，利用することに気づくかどうか)．n は 6 の倍数という指定があるので，例えば $n = 12$ とすると，$p + 2q + 3r = 12$ となる r は，$l = 0 \sim 4$ の 5 個であり，

$r = 0$ のとき，$p+2q = 12$ $\longleftarrow$ (1) で $n = 12$

$r = 1$ のとき，$p + 2q = 9$ $\longleftarrow$ (1) で $n = 9$

$r = 2$ のとき，$p + 2q = 6$ $\longleftarrow$ (1) で $n = 6$

$r = 3$ のとき，$p + 2q = 3$ $\longleftarrow$ (1) で $n = 3$

$r = 4$ のとき，$p + 2q = 0$ $\longleftarrow$ (1) で $n = 0$

つまり，(1) の結果を使うことができますね．しかし，(1) が n の偶奇で異なるため，注意が必要です．慎重に，落ち着いて $\sum$ 計算しましょう．

解

(1)

(i) n が偶数のとき

$n = 2m\ (m \geqq 1)$ とおくと，$2m = k + 2l$ をみたす $(k,\ l)$ の組は

$(k,\ l) = (2m,\ 0), (2m-2,\ 1), \cdots, (2,\ m-1), (0,\ m)$

の $m + 1$ 組である．つまり

$$a_n = m + 1 = \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}$$

(ii) n が奇数のとき

$n = 2m-1\ (m \geqq 1)$ とおくと，$2m-1 = k+2l$ をみたす $(k,\ l)$ の組は

$(k,\ l) = (2m-1,\ 0), (2m-3,\ 1), \cdots, (3,\ m-2), (1,\ m-1)$

の m 組である．つまり

$$a_n = m = \frac{n+1}{2}$$

(i)(ii) より，

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2} & (n\text{ が偶数}) \\ \dfrac{n+1}{2} & (n\text{ が奇数}) \end{cases}$$

(2) $n = 6j\ (j \geqq 1)$ とおくと，

$$p + 2r = 6j - 3r$$

したがって，

r が偶数のとき，$6j - 3r$ は偶数，

r が奇数のとき，$6j - 3r$ は奇数，

である．r は 0 から $2j$ までの $2j + 1$ 個なので，(1) の結果より，

(i) $r = 0,\ 2,\ 4,\ \cdots, 2j$ のとき

$p + 2r = 6j - 3r$ をみたす $(k,\ l)$ の組の個数は，$\dfrac{6j - 3r + 2}{2}$ 個なので，総数は，

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{j} \frac{6j - 3(2i) + 2}{2} \\ &= \sum_{i=0}^{j} (3j + 1 - 3i) \\ &=(3j + 1) + \sum_{i=1}^{j} (3j + 1 - 3i) \\ &=(3j + 1) + j(3j + 1) - 3 \times \frac{j(j+1)}{2} \\ &=\frac{3}{2}j^2 + \frac{5}{2}j + 1 \quad \cdots① \end{aligned}$$

(ii) $r=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2j-1$ のとき

$p+2r=6j-3r$ をみたす $(k,\ l)$ の組の個数は，$\dfrac{6j-3r+1}{2}$ 個個なので，総数は，

したがって，求める解の組の総数は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{j}\frac{6j-3(2i-1)+1}{2}\\
&=\sum_{i=1}^{j}(3j+2-3i)\\
&=j(3j+2)-3\times\frac{j(j+1)}{2}\\
&=\frac{3}{2}j^2+\frac{j}{2}\quad\cdots②
\end{aligned}
$$

よって，解の組の総数は，① と ② を合わせたものので

$$\left(\frac{3}{2}j^2+\frac{5}{2}j+1\right)+\left(\frac{3}{2}j^2+\frac{j}{2}\right)=3j^2+3j+1\quad 通り$$

$j=\dfrac{n}{6}$ を代入して

$$\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+1\quad 通り$$

■

注 もし，問題が「$k+2l \leqq n$」や「$p+2q+3r \leqq n$」のような不等式の形になっていれば，領域（平面または空間）内における格子点の個数を数え上げる問題になります．